Дифференциальные ур-я. Коровина Мария Викторовна

Годовой курс

Литература:

1) Владимиров Ур-я мат. физики. !

2) Бицадзе Ур-я мат. физики (либо ур-я в частных производных)

3) Треев Введение в теорию п.д.о. Том 1.

Экзамен в конце года.

Лекция 1

3.09.07.

Классификация ур-й в частных производных.

§1. Основные обозначения.

E^n - евклидово пр-во

$x = (x_1, \dots, x_n)$ - вектор

$|x| = \sqrt{(x,x)}$ - длина вектора

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - целочисленный вектор α_i - не отрица

мультииндекс.

$$D_\alpha f(x) \equiv \partial^\alpha f(x) := \frac{\partial^\alpha f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha} \dots \partial x_n^{\alpha}}$$

$\partial = (\partial_1 \ldots \partial_n)$, $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$

$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$

$\alpha ! := \alpha_1 ! \cdot \ldots \cdot \alpha_n !$

$\mathcal{D}$ – область в E^n.

$F(x, \ldots, P_{i_1, \ldots, i_n}, \ldots)$ – функция, такая, что

$x \in D$, $P_{i_1, \ldots, i_n} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$i_1, \ldots, i_n$ такие, что $\sum\limits_{j=1}^{n} i_j = k$,

$k = 0, \ldots, m$

Считаем, что

$\exists \dfrac{\partial F}{\partial P_{i_1, \ldots, i_n}} \neq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} i_j = m$

Уравнение в частных производных относительно

функции $u(x)$:

$$F\left(x, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}, \ldots\right) = 0$$

↓

Дифференц. ур-е имеет порядок m.

Линейное диф. ур-е:

F – линейна отн. всех $P_{i_1, \ldots, i_n}$

Квазилинейное ур-е:

F – линейна отн $p_{i_1,\dots,i_n}$ таких, что $\sum_{j=1}^{n} i_j = m$.
(старших произв. т.е.)

Пока не будем рассматр. другие случаи.

Вспомним ТФКП

$$x_k = y_k + i z_k$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_k} - i\frac{\partial f}{\partial z_k}\right)$$

<u>Помнить эти формулы</u>!

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{x}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_k} + i\frac{\partial f}{\partial z_k}\right) = 0$$

условие К–Р

<u>Типы ур-й</u>: (вспомним)

1) Уравнение колебаний:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x,t)$$

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) u$$

ч.с. - волновое ур-е:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + f$$

<u>Обозн</u>: $\Box_a u = f$

$\Box_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta$ – волновой оператор
оператор Д'Аламбера

2) Ур-е диффузии:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x,t)$$

т.с. Ур-е теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f$$

3) Стационарный случай

$u = u(x)$ нет зависимости от t.

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = F(x)$$

Ур-е Пуассона: $\Delta u = f$

Ур-е Лапласа: $\Delta u = 0$

Ур-е Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = f$

§2. Символы дифференциальных операторов.

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n \\ \sum_{j=1}^{n} i_j \le m}} A^k_{i_1,\dots,i_n}(x) \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = f(x)$$

max порядок производной = порядок ур-я.

$$\hat{L} u = f$$

$$\hat{L} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{i_1,\dots,i_n} A^k_{i_1,\dots,i_n} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}$$ – дифф. опер-р.

Символ дифф. опер-ра: (вместо i-ой произв. ставим ξ_i)

$$L(x,\xi) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1,\dots,i_n} A_{i_1,\dots,i_n}(x)\, \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n}$$

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$\mathrm{smbl}\, \hat{L} = L(x,\xi)$ переходим от опер-в к функциям.

<u>Главный символ дифф. опер-ра:</u>

$$\mathrm{Smbl}\, \hat{L} = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n \\ \sum_{j=1}^{n} i_j = m}} A^{m}_{i_1,\dots,i_n}\, \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n}.$$

<u>Пример</u>

Символ ур-я Гельмгольца:

$$\mathrm{smbl}\,(\Delta + k^2) = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 + k^2$$

$$\mathrm{Smbl}\,(\Delta + k^2) = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$$

<u>Порядок дифф. опер-ра.</u>

$\mathrm{ord}\, \hat{L}$

$\exists\, \mathrm{ord}\, \hat{L} = 2$, тогда $\mathrm{Smbl}\, \hat{L} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j$

§ 3 Эллиптичность дифф. операторов

__Опр__ Дифференц. опер-р $\hat{L}$ наз-ся <u>эллиптическим</u> в области D, если $\forall x \in D$ ф-ция $\operatorname{Smbl} \hat{L} = L(x, \xi)$ $\neq 0$ при $\xi \neq 0$, $\xi \in R^n$.

Пример: $\operatorname{Smbl} \Delta = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$

$$\operatorname{Smbl} \Delta = 0 \iff \xi = 0$$

$$\operatorname{Smbl}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) = p^2 - \xi_1^2 - \ldots - \xi_n^2$$

не эллиптичен!

__Опр__ Дифф. опер-р $\hat{L}$ порядка m наз-ся <u>равномерно-эллиптическим</u> в обл. D, если $\forall x \in D$ $\exists$ такие положит. константы k_1 и k_2, что будет выполнено нер-во:

$$k_1\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{\frac{m}{2}} \leq \left|\operatorname{Smbl} \hat{L}\right| \leq k_2\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{\frac{m}{2}}$$

__Пример__:

$$x_n \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

– эллипт., но не равномерно.

D – полуплоскость, $x_n > 0$.

§1. Классификация уравнений второго порядка.

$$\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{главному члену отвечает.}} + \Phi(x, u, \operatorname{grad} u) = 0. \qquad (1)$$

квазилинейн. ур-е.

просто символ не определен.

Замена переменных.

$$y_i = y_i(x_1, \dots, x_n)$$

$$y_i \in C^2, \quad D\left(\frac{y_1 \dots y_n}{x_1 \dots x_n}\right) = \det\left(\frac{\partial y_i(x)}{\partial x_j}\right) \neq 0$$

$x = x(y)$ Обозначим $u(x(y)) = \tilde{u}(y)$ или

$$\tilde{u}(y) = u(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = \overbrace{\sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l \partial y_k}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}}^{\text{старший член}} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l}\frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1):

$$\sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l \partial y_k}\overbrace{\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right]}^{\text{главный член.}} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l}\sum a_{ij}\frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(y, \tilde{u}, \operatorname{grad} \tilde{u}) = 0$$

$\tilde{a}_{ek}$ обозначим коэф. при производной $\frac{\partial^2 u}{\partial x_e \partial x_k}$

$$\boxed{\tilde{a}_{ek} = a_{ij}(x) \frac{\partial y_e}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_j}}$$

Фиксируем т. x_0.

Обозн: $\alpha_{ei} = \frac{\partial y_e(x_0)}{\partial x_i}$

Рассмотрим квадратичную форму.

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) p_i p_j$$

Будем эту кв. ф-му преобразовывать -

$$p_i = \sum_{e=1}^{n} \alpha_{ej} q_e$$

$$\tilde{a}_{ek} = \sum a_{ij}(x_0) \alpha_{ei} \alpha_{kj}$$

$$\sum_{e=1}^{r} q_e^2 - \sum_{e=r+1}^{m} q_e^2 = Q(q)$$

$q = q_1 \dots q_n$

Варианты: 1) $r = n$.
$r = 0,\ m = n$ - эллипт.

2) $m = n,\ r \geq 1 \quad r \leq m-1$ - гиперб.

3) $m < n$ - параболич.

(Характеристики)

$\boxed{\text{Лекция 2}}$

10.09.07.

Классификация уравнений в частных производных в точке.

(продолжение)

Уравн. 2-го порядка $\to \sum_{i=1}^{r} q_i^2 - \sum_{j=r+1}^{m} q_j^2$, $\dim V = n$

1) Эллиптический тип. $r = 0$ или $r = n$

(все слагаемые одного знака)

$\operatorname{rang} Q = n$ ранг квадратичной формы

$\boxed{\text{вырождения нет!}}$

2) Гиперболический тип $\operatorname{rg} Q = n$,

$r \geq 1$, $r < n$

(как полож., так и отриц. слагаемые.)

3) (Вырожденный случай) Параболический тип.

$\operatorname{rg} Q < n$ — слагаемых меньше, не важно каких знаков.

Уравнение 2-го порядка с постоянными коэф.

$$\underline{\sum_{l=1}^{r} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l^2} - \sum_{j=r+1}^{m} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_j^2} + \tilde{\Phi}(y, \tilde{u}, \operatorname{grad} \tilde{u}) = 0}$$

кано

Пример $y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ — уравнение Трикоми.

уже не с постоянными коэф.

к какому типу оно относ.

$y=0$ – параболич. $\quad (q_2^2)$ – квадратич. форма

$y>0$ – эллиптическ. $\quad (y q_1^2 + q_2^2)$

$y<0$ – гиперболическ.

Это ур-е – <u>смешанного типа</u>.

Что делать, если дано ур-е с постоян. коэф.? как определить его тип?

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi(x, y, \operatorname{grad} u) = 0$$

$$B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + B\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

Пишем соотв. квадрат. форму:

$$\underbrace{A q_1^2 + 2B q_1 q_2 + C q_2^2}_{\text{главный символ}}$$

~~старший~~ символ
главный

матрица квадрат. формы: $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = D$

Критерий Сильвестра из школы.

Смотрим на миноры.

1. $|A|>0, |D|>0$ – эллиптическ. случай
   $|A|<0, |D|>0$
2. $|D|=0$ – <u>параболич.</u>
3. Все остальные $|D| \neq 0$ не знакоопред. (не случ 1) – <u>гипербол.</u>

Характеристики диф. уравнений.

Начнем с д.у. 2-го порядка:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(u, x, \operatorname{grad} u) = 0 \qquad (1)$$

Опр Функция $\omega(x) \in C^1$ такая, что $\boxed{\operatorname{grad}\omega \neq 0}$ на поверхности $S: \omega(x) = 0$ наз. характеристической функцией ур-я (1), если на поверхн. S выполн. ур-е

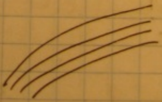
$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\frac{\partial \omega}{\partial x_j} = 0 \qquad (2)$$

Поверхность $\omega(x) = 0$ наз. характеристическая поверхн. ур-я (1) (характеристика)

Посмотрим, как (2) связано с (1): Взят главный символ (1).

Если каждая поверхность $\boxed{\omega(x) - C = 0}$ явл. характеристической поверхностью для ур-я (1), то будем говорить, что задано семейство характеристик.

(м.б. $a \le C \le b$) эти поверхности не $\cap$.



заполняют собой некоторую область.

$\hat{A} = \sum a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$

Smbl $\hat{A} = a(x, \xi)$ пусть это главный символ

$$\boxed{\text{Smbl} \quad a(x, \operatorname{grad} \varphi_0)\Big|_S = 0 \Leftrightarrow \text{эквивалентно (2).} \quad S: \omega(x) = 0 \quad \text{ф-ция } \omega \in C^1,\ \operatorname{grad}\omega \neq 0}$$

опр. характеристики.

| Все тоже самое для уравнений не только 2-го порядка все теже определения !

Примеры.

1) Эллиптическое ур-е:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

Что будет его хар-ми?

$$\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\right)^2 = 0$$ ур-е для опр. хар-ой ф-ции.

решение только const, а grad C = 0

Нет характеристик!

2) Волновое ур-е

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0$$ (гиперб. тип)

Ур-е для ω.

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - a^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right)^2 = 0$$ решений уже очень много. (3)

(уравнение Гамильтона - Якоби)

Решения:

① Характеристический конус вектор

$$\omega(t,x) = a(t-t_0)^2 \cancel{+} - |x - x_0|^2 = 0$$ хар. пов.

она не явл. решением (3).

Но она явл. решением на поверхности
$\omega(t,x) = 0$.

② $$\boxed{at + (x,b) = c, \quad |b| = 1}$$

семейство характерист. поверхностей

3) Уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial}{\partial t} u = a^2 \Delta u$$ главный символ.

ур-е для ω:

$$a^2 \sum \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right)^2 = 0$$

$\boxed{t = C}$ семейство хар-кая поверх. $\omega(x,t) = t$ хар-ая ф-ция.

Зачем нужны хар-ки?

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F = 0$$

Ф-ла замены переменных: $x = x(y)$

$$\tilde{a}_{ek}(y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial y_e}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}$$

$\exists$ нашли ур-е характ.

$\omega(x) = 0$ ~~и~~ $\operatorname{grad}\omega \neq 0$

$y_1 = \omega(x)$

$y_2 = x_2$ $\qquad \sum^{n} a_{ij} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = 0$

$\vdots$

$y_n = x_n$

Характеристики и приведение к каноническому виду ур-й 2-го порядка с двумя неизвестными.

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi(x, y, u, \operatorname{grad} u) = 0$$

$a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y) \in C^2$. Одновремен. не обращ. в ноль

$\exists$ $a(x,y) \neq 0$

Делаем замену переменных:

$\xi = \xi(x,y)$; $\eta = \eta(x,y)$, $\xi, \eta \in C^2$;

$$D\left(\frac{\xi, \eta}{x, y}\right) \neq 0$$

получим ур-е такого вида:

$$\tilde{a}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 2\tilde{b}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \tilde{c}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + \Phi(\xi, \eta, \tilde{u}, \mathrm{grad}\,\tilde{u}) = 0$$

$$\tilde{a}_{ek}(y) = \sum$$

$$(8)\begin{cases} \tilde{a} = a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \\ \tilde{b} = a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + c\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \tilde{c} = a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \end{cases}$$

$$\tilde{a} = 0 \qquad a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = 0$$

$$a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = 0$$

$$p = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad k = \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$a\left(\frac{p}{k}\right)^2 + 2b\frac{p}{k} + c = 0$$

$$D = 4b^2 - 4ac$$

$$p_1 = -\frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}k, \quad p_2 = -\frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}k$$

Обозн.:

$$d = b^2 - ac; \quad \lambda_1 = \frac{b - \sqrt{d}}{a}, \quad \lambda_2 = \frac{b + \sqrt{d}}{a}$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{2\sqrt{d}}{a}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \lambda_1(x,y)\dfrac{\partial \xi}{\partial y} = 0 & (P_2) \\[2ex] \dfrac{\partial \xi}{\partial x} - \lambda_2(x,y)\dfrac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

значительно более простая система.

Плохо, что ур-е нелинейное

$$\boxed{\xi(x,y) = C - \text{хар-ка.}}$$

Эти два ур-я определяют 2 семейства характеристик

$d > 0$ −

$$A = \left\| \begin{matrix} a & b \\ b & c \end{matrix} \right\|, \quad |A| = ac - b^2 < 0$$

$a > 0$ − не знакоопр.

$a < 0$ $|A| < 0$.

<u>гипер б.</u>

Форма ранга 2 не знакоопр.

$d=0$ параб.

$d<0$, $|A|>0$ эллипт.

Лекция 3
24.09.07

Приведение к канонич. виду

дифференц. ур-й 2-го порядка с двумя перем.

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Phi(x,y,u,\operatorname{grad}u) \quad (1)$$

Строим 2 семейства хар-к

$\xi(x,y)=C_1$, $\eta(x,y)=C_2$ 1) $\xi\neq0$, $\operatorname{grad}\eta\neq0$ $D\left(\frac{\xi,\eta}{x,y}\right)=0$

$$(2)\quad \frac{\partial\xi}{\partial x}+\lambda_1(x,y)\frac{\partial\xi}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\eta}{\partial x}+\lambda_2(x,y)\frac{\partial\eta}{\partial y}=0.$$

Лемма $\exists\ \omega(x,y)\in C^2$ $\frac{\partial\omega}{\partial y}\neq0$ Для того, чтобы семейство $\omega(x,y)=C$ давало характеристическ ур-е (1) н и д, чтобы $\omega(x,y)=C$ являлось общим интегралом одного из двух ур-й

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_1(x,y)\ \text{или}\ \frac{dy}{dx}=\lambda_2(x,y)\quad (2)$$

Док-во $\exists\ \omega(x,y)=C$ такая, что $\frac{\partial\omega}{\partial y}\neq0 \Rightarrow y=\varphi(x,C)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\varphi}{dx}=-\frac{\partial\omega/\partial x}{\partial\omega/\partial y}$$

Если $\omega(x,y)=C$ явл характ. ур-е (1)

$$a\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}+c\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2=0$$

поделим на $\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2$. т.к $\neq 0$.

$$a\left(\frac{d\varphi}{\partial x}\right)^2 - 2b\frac{\partial\varphi}{dx} + c = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \lambda_1, \lambda_2.$$

г.т.д.

<u>Вывод</u> Общие интегралы ур-й (2) определяют семейство хар-к $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$

1) $\underbrace{\xi(x,y) = C_1}_{\text{общий интеграл 1-го ур-я (2)}}$ $\quad \underbrace{\eta(x,y) = C_2}_{\text{— " — 2-го ур-я (2)}}$

$D\left(\frac{\xi,\eta}{x,y}\right)$ проверим, = ли нулю этот якобиан.

$$D\left(\frac{\xi,\eta}{x,y}\right) = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x} \ominus$$

$\boxed{\text{Формулы!}}$ $\boxed{\frac{\partial\xi}{\partial y}\lambda_1 = -\frac{\partial\xi}{\partial x} \qquad \frac{\partial\eta}{\partial y}\lambda_2 = -\frac{\partial\eta}{\partial x}}$

$$\ominus -\frac{\partial\xi}{\partial y}\lambda_1\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\left(-\lambda_2\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) = \underset{\neq 0}{\frac{\partial\xi}{\partial y}} \cdot \underset{\neq 0}{\frac{\partial\eta}{\partial y}}(\lambda_2 - \lambda_1) =$$

~~[illegible]~~ $= \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{2\sqrt{d}}{a} \neq 0$ и, кроме того, λ_1 и λ_2 д. $\exists$. $\in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{d > 0}$ — необх. и дост. условие $\exists$ 2-х семейств хар-к определяющих координаты $\xi = \xi(x,y)$ $\eta = \eta(x,y)$

а $d>0$ – гиперболическое ур-е.

$\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\tilde{a} = \tilde{c} = 0$

Осталось проверить, чтобы $\tilde{b} \neq 0$.

$$\tilde{b} = a \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + b\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + c\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} =$$

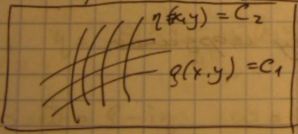
$$= \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\left(a\lambda_1\lambda_2 - b(\lambda_1+\lambda_2)+c\right) =$$

$$= -\frac{2d}{a}\underset{\neq 0}{\frac{\partial\xi}{\partial y}}\,\underset{\neq 0}{\frac{\partial\eta}{\partial y}} \neq 0 \;!$$

$$\boxed{\text{Гиперб. ур-е}\quad \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta\,\partial\xi} + \tilde{\varphi}(\tilde{u},\eta,\xi,\operatorname{grad}\tilde{u})=0}$$

Если сделать замену $p=\xi+\eta$, $\sigma=\xi-\eta$, то

в ф., к которому мы привыкли. $\boxed{\frac{\partial^2\tilde{\tilde{u}}}{\partial p^2} - \frac{\partial^2\tilde{\tilde{u}}}{\partial\sigma^2}+\tilde{\tilde{\varphi}}=0}$



2) Параболический случай. (самый плохой случай)

$\lambda_1=\lambda_2 \qquad d=0$

цель: с помощью введения хар-к привести к каноническому виду.

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \varphi = 0}$$

нужно занулить $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{b}{a}\frac{\partial \xi}{y} = 0 \quad (4)$$

ур-е, кот. удовлетворяют хар-ки. (т.к. $d=0$)

Берем решение этого ур-я (общий интеграл):

$$\xi(x,y) = C_1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} \neq 0.$$

Задает семейство хар-к.

Можем взять еще один интеграл „любым“

$$x = C_2$$

для второй координаты.

т.к. из ур-й мы его взять не можем, т.к. ур-е-то одно!

$$\eta = x$$

$$D\left(\frac{\xi,\eta}{x,y}\right) = \frac{\partial \xi}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_{0} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{1} = -\frac{\partial \xi}{\partial y} \neq 0$$

якобиан

$\Rightarrow$ Замена $\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$ — дает систему координат.

Посчитаем $\tilde{a}$.

$$\tilde{a} = a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \overset{(4)}{=} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \underbrace{\left(a\frac{b^2}{a^2} - 2b\frac{b}{a} + c\right)}_{=0 \text{ т.к. } d=0}$$

$\tilde{b} = a\frac{\partial \xi}{\partial x} + b\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$

$\tilde{c} = a$ (т.к. $\eta = x$)

$\Rightarrow$ ур-е получим

$$\boxed{a\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + \tilde{\Phi} = 0.}$$ параболич. ур-е в каноническом виде.

Эллиптический случай

$d < 0$. комплексные ф-ции.

Будем считать, что a, b, c – аналит. ф-ции. т.е. раскладываются в ряд.

$\Rightarrow$ λ_1 и λ_2 – аналитич. ф-ции

$\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \lambda_1\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial \omega}{\partial y} \neq 0. \qquad (*)$$

$$\xi = \frac{\omega(x,y) + \overline{\omega}(x,y)}{2}$$

$$\eta = \frac{\omega(x,y) - \overline{\omega}(x,y)}{2i} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\overline{\omega} = \xi - i\eta \qquad \omega = \xi + i\eta$

$$\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial y} = 0 \qquad \text{т.к. } \overline{\lambda_1} = \overline{\overline{\lambda_2}} \qquad (*)$$

Новые переменные:

$\xi = \xi(x,y)$ — В этих переменных ур-е приведется к канонич. виду. покажем.

$\eta = \eta(x,y)$

$$D\left(\frac{\xi,\eta}{x,y}\right) = ?$$

$$\left(\frac{\xi,\eta}{x,y}\right) = \left(\frac{\xi,\eta}{\omega,\bar\omega}\right)\left(\frac{\omega\,\bar\omega}{x,y}\right)$$ тождество, заметим.

$$D\left(\frac{\xi,\eta}{x,y}\right) = \left(\frac{\partial\xi}{\partial\omega}\frac{\partial\eta}{\partial\bar\omega} - \frac{\partial\xi}{\partial\bar\omega}\frac{\partial\eta}{\partial\omega}\right) \times$$

$$\times\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\bar\omega}{\partial y} - \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\bar\omega}{\partial x}\right) \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$= -\frac{\sqrt{-d}}{\underset{\neq 0}{a}}\underset{\neq 0}{\left|\frac{\partial\omega}{\partial y}\right|^2} \neq 0 \quad !$$

Проверили.

=> замена определяет новую систему координат.

Какие будут коэф:

$\tilde a =$

$\omega(x,y) = c$ — хар-ка

$$a\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 = 0 \qquad (5)$$

ур-е для опр-я хар-к

$\omega = \xi + i\eta$

подставляем

разделяем действит. и мнимую часть. обе приравниваем 0.

действительная часть:

$$\underbrace{a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2}_{\tilde{a}} = \Big[a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\Big] \Rightarrow \tilde{a} = \tilde{c}\ \boxed{\neq 0 \Leftarrow d<0.}$$

мнимая часть:

$$a\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + b\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) +$$

$$+ c\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \qquad (**)$$

заметим что $(**) = \tilde{b}$. $\Rightarrow \tilde{b} = 0$.

Получим: $\tilde{a} = \tilde{c} > 0$, $\tilde{b} = 0$ $\Rightarrow$ поделим на $\tilde{a}$ и $\tilde{c}$.

$$\boxed{\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + \varphi = 0}$$

Трикоми

Пример Ур-е Трикоми.

ур-е смешанного типа.

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$y>0$ – эллипт.
$y=0$ – параболич. – не будем Δ, т.к. не $\exists$ окрестности в кот. ур-е параб.
$y<0$ – гипербол.

$$d = b^2 - ac = -y$$

$$\lambda_1 = \frac{b - \sqrt{d}}{a} = -\frac{1}{\sqrt{-y}} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{-y}}$$

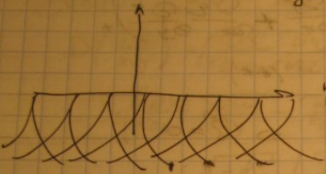
$y<0$ – гипербо. ур-е с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{-y}}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{-y}}$$

Решение: общий интеграл

$$\frac{3}{2}x + \sqrt{-y^3} = C_1, \quad \frac{3}{2}x - \sqrt{-y^3} = C_2$$

две семейства хар-к.



$$\xi = \frac{3}{2}x + \sqrt{-y^3}$$

$$\eta = \frac{3}{2}x - \sqrt{-y^3}$$

Приведенное ур-е: $$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{6(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi} - \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\right) = 0$$

$$\boxed{,\ \xi > \eta}$$

$y>0$ – эллипт. случай.

$$\lambda_1 = -i\frac{1}{\sqrt{y}} \qquad \lambda_2 = i\frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} - i\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0$$

решение: $\omega = \frac{3}{2}x - iy^{\frac{3}{2}}$

замена переменных
$$\begin{cases} \xi = \dfrac{\omega+\overline{\omega}}{2} = \dfrac{3}{2}x \\ \eta = \dfrac{\omega-\overline{\omega}}{2i} = -y^{3/2} \end{cases}$$

при этом ξ и η – НЕ Х.Ф.!

Х.Ф. – ω.

ур-е: $\eta < 0$

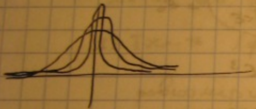
$$\boxed{\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\eta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = 0}$$

1 лекция Пропущена

Лекция 5

8.10.07

Обобщенные функции и
обобщ. решения ур-й
в частных производных.



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$$ – дельта-ф-ция.

"$\frac{1}{V_{\text{шара}}}$"

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}, & |x| \le \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$$

Масса, размер которой равен 1, находится в шаре радиуса ε.

т.е. $f_\varepsilon(x)$ – плотность.

$$\delta(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \ne 0 \end{cases}$$ (дельта-функция, не ф-ция, а функционал)

$$\int_V \delta(x)\,dx = \begin{cases} 1, & 0 \in V \\ 0, & 0 \notin V \end{cases}$$

$\varphi(x)$ – непр. ф-ция

$\int \delta(x)\varphi(x)\,dx$

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$$

Т.к. $\varphi(x)$ – непр. то $\forall \varepsilon_0>0\ \exists \delta_0>0$; что

$$|\varphi(x)-\varphi(0)| < \varepsilon_0, \text{ если } |x|<\delta_0$$

Оценим

$$\left|\int f_\varepsilon(x)\varphi(x)-\varphi(0)\right| = \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\left|\int\limits_{|x|<\varepsilon}\big(\varphi(x)-\varphi(0)\big)dx\right| \leq$$

$$\leq \frac{3}{4\pi\varepsilon}\int\limits_{|x|<\varepsilon}|\varphi(x)-\varphi(0)|\,dx < \varepsilon_0\frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\underbrace{\int\limits_{|x|<\varepsilon}dx}_{=\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} = \varepsilon_0$$

показали.

δ-функция, Функция Дирака.

δ-функция – линейный непрерывный функционал, ставящий непр. ф-ции $\varphi(x)$ в соотв. её значение в нуле.

$(\delta,\varphi) = \varphi(0)$ – ф-л δ действ. на φ.

---

§1 Основные функции.

Основной ф-цией наз-ся гладкая, финитная ф-ция

$\varphi\in C^\infty$

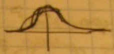
Носителем ф-ции $\varphi(x)$ наз-ся замыкание мн-ва точек, в кот. $\varphi\neq 0$. $\operatorname{supp}\varphi(x)$

финитная ф-ция – это функция с компактным носителем

$$\omega_\varepsilon = \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x|^2}}, & |x|<\varepsilon \\ 0, & |x|\geq\varepsilon \end{cases}$$

$\omega_\varepsilon \in C^\infty$

пример финитных функций.



Сходимость посл-ти основных функций.

Опр посл-ть $\{\varphi_n\}$ основн. ф-ций наз-ся сходящейся к нулю в мн-ве осн. функций, если

1) Посл-ть $\{\varphi_n\}$ вместе со всеми своими производными равномерно сход. к нулю в R^n

$$\boxed{\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\varphi_n \rightrightarrows 0 \quad \forall\alpha \quad \text{в } R^n}$$

2) $\exists$ такая константа R, что носитель

$\operatorname{supp}\varphi_n \subset U_R$, $\forall n$

шар радиуса R

Опр Мн-во основных функций со структурой линейного пространства над полем $\mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$ и введенной сходимостью наз-ся пространством основных функций.

Обозначение $D(R^n)$ – пр-во основных функций.

Свойства:

- Операция дифференцирования непрерывна в D.

Док-во $\exists\ \varphi_k \to 0$ в D

$\Rightarrow$ 1) $\exists\ R>0$, что $\operatorname{supp} \varphi_k \subset U_R$

2) $\forall \alpha,\ \partial^\alpha \varphi_k(x) \rightrightarrows 0,\ x \in \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$

оператор дифф. ∂^β.

$\Rightarrow$ Носители всех $\partial^\beta \varphi_k$ будут также лежать в U_R

$\operatorname{supp} \partial^\beta \varphi_k \subset U_R,\ \forall k$ $\quad (\Rightarrow)$

$\Rightarrow \forall \alpha$ ~~...~~ $\partial^\alpha[\partial^\beta \varphi_k] = \partial^{\alpha+\beta} \varphi_k \rightrightarrows 0$

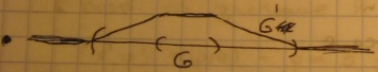
$(\Rightarrow)$ Посл-ть $\partial^\beta \varphi_k$ сх-ся к нулю в D

ч.т.д.

- Операция линейной замены переменных

$\varphi(x) \to \varphi(\underset{\text{матрица}}{A}x + b)$ и операция умножения на функцию $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ $[\varphi(x) \to u(x)\varphi(x)]$

непрерывны в D

- 

$G \subset G'$

$\exists\ \eta(x) \in D:\ 0 \le \eta(x) \le 1$

~~supp~~ $\eta(x) = 1$ при $x \in \bar{G}$

$\eta(x) = 0$ при $x \notin G'$

$\operatorname{supp} \eta(x) \in G'$

Всегда можно построить такую гладкую ф-цию.

§ 2 Пространство обобщенных функций.

Обобщённой функцией наз-ся линейный непр функционал опред. на D

Обозн. $D'(R^n)$ обозн. мн-во обобщ. функций
(пр-во обобщ. функций)

Действие функционала $f \in D'$ на функцию $\varphi(x) \in D$
$$(f, \varphi)$$

Расшифровка определений:

1) функционал – отображ. $D \to \mathbb{C}$
$$f: D \to \mathbb{C}$$

2) линейность функц. $f \in D'$

$$\forall \varphi, \psi \in D, \quad (f, \alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(f, \psi) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

3) Непрерывность

$$\exists \ \{\varphi_k\} \to 0 \ \text{в} \ D \Rightarrow \underbrace{\{(f, \varphi_k)\} \to 0}_{\text{сходимость числовой последовательности}}$$

Сложение и умножение на элем $\mathbb{C}$ обобщ. функций

$f, g \in D', \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$(\lambda f + \mu g, \varphi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi)$$

$\varphi \in D$.

$$\boxed{\lambda f + \mu g \in D' \ ?}$$

1) Проверяем линейность

$$(\lambda f+\mu g,\ \alpha\varphi+\beta\psi) = \lambda(f,\alpha\varphi+\beta\psi)+$$
$$+\mu(g,\alpha\varphi+\beta\psi) =$$
$$= \alpha\lambda(f,\varphi)+\beta\lambda(f,\psi)+\mu\alpha(g,\varphi)+\mu\beta(g,\psi) =$$
$$= \alpha[\lambda(f,\varphi)+\mu(g,\varphi)]+\beta[\lambda(f,\psi)+\mu(g,\psi)] =$$
$$= \alpha(\lambda f+\mu g,\varphi)+\beta(\lambda f+\mu g,\psi)$$

линейный!

2) Непрерывность функционала $(\lambda f+\mu g)$

$\exists\ \varphi_k \to 0$ в D

$$(\lambda f+\mu g,\varphi_k) = \lambda\underbrace{(f,\varphi_k)}_{\to 0}+\mu\underbrace{(g,\varphi_k)}_{\to 0} \to 0.$$

Сходимость в D'

Посл-ть $f_k \to f$ в D', если $\forall\varphi\in D$

числовая посл-ть $(f_k,\varphi)\to(f,\varphi)$, $k\to\infty$.

Опр. Множество обобщенных функций со структурой линейного пр-ва над полем $\mathbb{C}$ и определенной сходимостью наз-ся пространством обобщенных функций

$$D'(\mathbb{R}^n)$$

§3 Носитель обобщенных функций.

<u>Опр</u> Обобщенная ф-ция f равна нулю в области G, если $\forall\, \varphi \in D$ такой, что $\operatorname{supp} \varphi \subset G$ выполнено $(f, \varphi) = 0$.

Если ф-ция $f \in D'$ равна нулю в окрест. любой точки области G, то $f = 0$ в G.

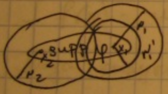
<u>Док-во</u>

$\varphi \in D(G)$ – означает, что $\operatorname{supp} \varphi \subset G$

G - компакт.

Выберем покрытие $\operatorname{supp} \varphi$ конечным числом шаров

Обозначим <u>шары</u> $U(x_k, r_k)$, $k = 1, .., N$



БОО Уменьшим шары и возьмем другое покрытие $U(x_k, r_k')$

$r_k' < r_k$

Строим основные функции

$h_k(x)$

$h_k(x) = 1$, при $x \in \overline{U}(x_k, r_k')$, $\operatorname{supp} h_k \subset U(x_k, r_k)$

$h(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} h_k(x)$ Ясно, что $h(x) \geq 1$ в нек. окр $\operatorname{supp} \varphi$

$$\varphi_k(x) = \varphi(x)\,\frac{h_k(x)}{h(x)} \in D(U(x_k, r'_k)),\quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k$$

$$\to (f, \varphi) = (f, \sum_{k=1}^{N} \varphi_k) = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) = 0$$

ч.т.д.

Лекция 6
15.10.07

Регулярные и сингулярные обобщенные функции и формулы Сохоцкого.

§1 Носитель обобщенной функции.

Лемма Для того, чтобы обобщенная функция $= 0$ в области G $\Leftrightarrow$ она равнялась нулю в некот. окрестностях всех точек области G.

док-ли в прошлый раз.

Нулевым мн-вом ф-ции $f \in D'(R^n)$ наз-ся объединение окрестностей точек в которых f обращается в ноль.

Обозначение: $\mathcal{O}_f$ - нулевое мн-во.

открытое

По определению: $\operatorname{supp} f = R^n \setminus \mathcal{O}_f$ носитель

носитель - замкнутое мн-во

Выводы: В любой окрестности вне своего носителя обобщенная функция $f \in D'(R^n)$ равна нулю.

$(f, \varphi) = 0$, $\varphi \in D$; $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} \varphi = \varnothing$.

Носитель обобщенной ф-ции f состоит из тех и только тех точек ~~в~~ окрестности которых f не обращается в ноль.

(не верно для основных ф-ций)

G – область в R^n, $f \in D'(R^n)$

Берем линейный непр. функционал f_G:

$$(f_G, \varphi) = (f, \varphi), \quad \varphi \in D(G)$$

носитель φ не G.

f – индуцир на G лин, непр ф-ал f_G

$$f_G \in D'(G)$$

§ 2 Регулярные обоб щ. функции.

Локально-интегрируемая ф-ция – $\in L_1$ на компакте.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\exists$ $f(x)$ – лок. интегр. ф-ция в R^n

Тогда опр(е)делим с помощью нее обобщенную ф-цию

$$(f, \varphi) = \int\limits_{R^n} f(x)\, \varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi \in D(R^n) \qquad (1)$$

$\int$ – сх-ся т. к. φ имеет конечный носитель

$\forall$ лок. интегр. ф-ции мы можем поставить в соот. обобщ. ф-цию

Опр Обобщенная функция, определенная локально интегр. функцией f по фор-ле (1) наз-ся регулярной обобщенной ф-цией

2^n-1

<u>Опр</u> Регулярные обобщ. ф-ции $f_1 \in D'(R^n)$ и $f_2 \in D'(R^n)$ наз-ся равными, если $\forall \varphi \in D(R^n)$ вып $(f_1, \varphi) = (f_2, \varphi)$

<u>Утв</u> Регулярные обобщ. ф-ции f_1 и f_2 равны т. и т.т. если

$f_1 = f_2$ п.в.

лок. интегр ф-ции

<u>Док-во</u> (докажем только необходимость) в одномерном случае

$$\int f_1(x)\varphi(x)\,dx = \int f_2(x)\varphi(x)\,dx \qquad (*)$$

Докажем, что $f_1 \overset{п.в.}{=} f_2$.

Обозначим через $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ и $\exists\, f(x) \neq 0$.

$\exists$, также, носитель $\varphi(x)$ $\operatorname{supp}\varphi(x) \subset [a, b]$

Обозначим $F(x) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dF(x) =$$

$$\overset{\text{по частям}}{=} \underbrace{F(x)\varphi(x)\Big|_a^b}_{0} - \int\limits_a^b F(x)\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\int\limits_a^b F(x)\varphi'(x)\,dx = 0$$

а $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = 0$ из $(*)$

т.к. f_1 и f_2 лок интегр $\Rightarrow$ f - лок интегр. $\Rightarrow$

$F(x) = \int\limits_a^x f(x)\,dx$ — непрерывная.

Если $F(x) \neq 0$ на отр то выберем $\varphi'(x)$, чтобы $\int\limits_a^b F(x)\varphi'(x)\,dx > 0$

$\Rightarrow F(x) = 0$

$\Rightarrow f(x) \overset{\text{п.в.}}{=} 0 \Rightarrow f_1 \overset{\text{п.в.}}{=} f_2$

Лемма Дюбуа – Реймона

Для того, чтобы регулярн. обобщ. ф-ция $f \in D'(R^n)$ равнялась нулю необх. и достаточно, чтобы лок. интегр. ф-ция f равнялась нулю п.в.

Лемма Если последовательность локально-интегр. ф-ций $\{f_n\}$ сх-ся равномерно в $\mathbb{R}^n$ к ф-ции $f(x)$ на каждом компакте, то последовательность обобщенных функций $\{f_n\}$ в D' сх-ся к той же самой ф-ции в D'.

Док-во $\forall \varphi \in D$

$$(f_n, \varphi) = \int f_n(x)\, \varphi(x)\, dx \to \int f(x) \varphi(x) dx = (f, \varphi)$$

§3 Сингулярные обобщенные функции

Пример δ-функции.

Утв δ-ф-ция явл сингулярной обобщ. ф-цией.

Пусть это не так. Тогда $\exists$ лок-интегр. ф-ция $f(x)$:

$$(\delta, \varphi) = \int f(x)\, \varphi(x) = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in D(R^n)$$

$$x = (x_1, .., x_n) \qquad x_1 \varphi(x) \in D(R^n)$$

$$\int f(x)\, x_1 \varphi(x) dx = [x_1 \varphi(x)]\Big|_{x=0} = 0 = (x_1 f, \varphi) \quad \forall \varphi$$

$\Rightarrow x_1 f \in D'(R^n)$ равна нулю

т.с. $x_1 f = 0$ п.в. $\Rightarrow f = 0$ п.в

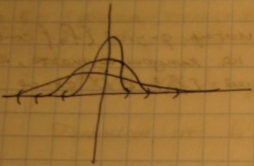
!?

δ – сингулярная обобщ. ф-ция.

Сходимость к $\delta(x)$-ф-ции

$$\omega_\varepsilon = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x|^2}}, & |x|<\varepsilon \\ 0, & x\ge\varepsilon \end{cases}$$

Выбирать C_ε будем из того, что $\int\omega_\varepsilon(x)dx=1$



Докажем, что $\omega_\varepsilon(x)\to\delta(x)$ в D' при $\varepsilon\to+0$

Надо док-ть, что

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\omega_\varepsilon(x)\varphi(x)dx=\varphi(0) \quad (*)$$

т.к. $\varphi(x)$ – непр, то $\forall\eta>0\ \exists\varepsilon_0>0: |\varphi(x)-\varphi(0)|<\eta$ вып. при условии $|x|<\varepsilon_0$

$$\left|\int\omega_\varepsilon(x)\varphi(x)dx-\varphi(0)\right|\le\int\omega_\varepsilon(x)|\varphi(x)-\varphi(0)|dx<\{\varepsilon_0<\varepsilon\}<$$

$$<\eta\int\omega_\varepsilon(x)dx=\eta$$

можем сингулярную ф-цию приблизить «хорошими» из C_∞

Обобщение δ-функции

S – кусочно-гладкая поверхность в R^n

$\mu(x)$ – непр ф-ция заданная на S

Опред. обобщ ф-цию $\mu\delta_S$

$(\mu\delta_S, \varphi) = \int\limits_S \mu(x)\varphi(x)\,dS, \quad \varphi \in D$

$\mu\delta_S$ – простой слой.

$\operatorname{supp} \mu\delta_S \subset S$

§ 4 Формула Саховского

$P\frac{1}{x}$ – лин. функц-л

$$\left(P\frac{1}{x}, \varphi\right) = V_P \int \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

Линейность ф-ла $P\frac{1}{x}$ очевидна

Докажем непрерывность $P\frac{1}{x}$.

$\varphi_n \to 0$ в D $\to$ $\varphi_n(x) = 0$ $\forall n$ начиная с нек. номера

при $|x| > R$, $\varphi_n^{\alpha}(x) \rightrightarrows 0$.

остаточный член в форме Лагранжа

$$\left|\left(P\frac{1}{x}, \varphi_n\right)\right| = \left|V_P\int\frac{\varphi_k(x)}{x}\,dx\right| = \left|V_P\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi_k(0) + x\varphi_k'(\xi)}{x}\,dx\right| \leq$$

$$\leq \left|V_P\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi_k(0)}{x}\,dx\right| + \int\limits_{-R}^{R}|\varphi_k'(\xi)|\,dx \leq 2R\max_{x\in R}|\varphi_k'(x)| \to 0$$

(первое слагаемое $= 0$)

Вывод $P\frac{1}{x} \in D'(\mathbb{R}^1)$

Хотим док-ть, что $\lim\limits_{\varepsilon\to +0}\int\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx = -i\pi\varphi(0) + V_P\int\frac{\varphi(x)}{x}\,dx, \quad \varphi \in D$

Лекция 7 Формула Сохоцкого

22.10.07

$P\frac{1}{x}$ – лин. непр. функционал на $D(R^1)$

$$\left(P\frac{1}{x}, \varphi\right) = V_p\int \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

$P\frac{1}{x}$ – обобщенная функция (можно далее показать, что сингулярная)

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int \frac{\varphi(x)}{x\pm i\varepsilon}\,dx = -i\pi\varphi(0) + V_p\int\frac{\varphi(x)}{x}\,dx,\quad \varphi\in D$$

Докажем эту формулу $\boxed{\text{Формула Сохоцкого}}$

Док-во $\varphi(x)\in D(R^1) \Rightarrow \varphi(x)=0$ при $|x|>R$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-R}^{R}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\,dx =$$

$$= \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-R}^{R}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,dx + \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-R}^{R}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}(\varphi(x)-\varphi(0))\,dx =$$

Вычисление интеграла:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-R}^{R}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\,dx = 0 \quad \text{(интеграл от нечетной ф-ции)}$$

$$\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^2+\varepsilon^2}\,dx = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2}\int_{-R}^{R}\frac{1}{\frac{x^2}{\varepsilon^2}+1}\,d\frac{x}{\varepsilon} = \frac{2}{\varepsilon}\,\mathrm{sgn}(\varepsilon)\,\cancel{\mathrm{tg}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{R}{\varepsilon}$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon} = -2i\,\varphi(0)\,\mathrm{arctg}\,\frac{R}{\varepsilon} + \int_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx =$$

$\to \varphi(0) + x\cdot\varphi'(0) + \dots$

непрерывная, т.к. $\varphi(x)$ – беск дифф-ная $\Rightarrow$ раскладывается ряд Тейлора

$$= -i\pi\varphi(0) + V_p\int\frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

ч.т.д.

Ф-лу Сохоцкого часто записывают в виде:

$$\boxed{\underbrace{\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{x+i\varepsilon}}_{\text{обобщ. ф-ция}}=\frac{1}{x+i0},\quad \underbrace{\frac{1}{x+i0}=-i\pi\delta(x)+P\frac{1}{x}}_{\text{обобщ. ф-ция}}}$$

$$\frac{1}{x-i0}=i\pi\delta(x)+P\frac{1}{x}$$

Операции над обобщенными функциями

1) Линейная замена переменных

$\exists\, f(x)$ – лок. интегр. в $\mathbb{R}^n$ $\quad x=Ay+b$, A – матрица $\in R^{n\times n}$, b – вектор, $\det A\neq 0$

$$(f(Ay+b),\varphi(y))=$$

$$=\int f(Ay+b)\varphi(y)\,dy=\frac{1}{|\det A|}\int f(x)\varphi[A^{-1}(x-b)]\,dx=$$

$$=\frac{1}{|\det A|}(f(x),\varphi[A^{-1}(x-b)])$$

Опр Линейная замена переменных:

$$\boxed{(f(Ay+b),\varphi(y))=\frac{1}{|\det A|}(f(x),\varphi[A^{-1}(x-b)])}$$

Замена $x=y+b$

Пример

$$(\delta(x-x_0),\varphi)=(\delta,\varphi(x+x_0))=\varphi(x_0)$$

2) Операция умножения на ф-цию из класса $C^\infty(R^n)$, $a(x)\in C^\infty(R^n)$

f – рег. обобщенная ф-ция

$$(af,\varphi)=\int a(x)f(x)\varphi(x)\,dx=(f,a\varphi)$$

Опр $f\in D$, $a(x)\in C^\infty(R^n)$ т.о.

$$(af,\varphi)=(f,a\varphi),\quad \varphi\in D(R^n)$$

Примеры

1) $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$

действ.

$(a\delta,\varphi) = (\delta, a\varphi) = a(0)\varphi(0)$

Показать, что

$x\,\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$

$(x\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi) = (\mathcal{P}\frac{1}{x}, x\varphi) = \mathrm{Vp}\int \frac{x\varphi(x)}{x}\,dx = \int \varphi(x)\,dx = (1,\varphi)$

Дифференцирование обобщенных функций

Пусть $f \in C^p(\mathbb{R}^n)$, тогда $\forall\alpha: |\alpha| \le p$ и $\varphi \in \mathcal{D}$

$(\partial^\alpha f,\varphi) = \int \partial^\alpha f(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{-|\alpha|}\int f(x)\,\partial^\alpha\varphi(x)\,dx =$

$= (-1)^{|\alpha|}(f,\partial^\alpha\varphi)$

<u>Опр</u> Обобщ-ой произв. ф-ции $f \in \mathcal{D}'$ наз

$(\partial^\alpha f,\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f,\partial^\alpha\varphi),\ \varphi \in \mathcal{D}$

<u>Св-ва</u> если $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, то $\partial^\alpha f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

1) Линейность

$(\partial^\alpha f, \lambda\varphi + \mu\psi) = (-1)^{|\alpha|}(f, \partial^\alpha(\lambda\varphi + \mu\psi)) =$

$= (-1)^{|\alpha|}(f, \lambda\partial^\alpha\varphi + \mu\partial^\alpha\psi) = (-1)^{|\alpha|}\lambda(f,\partial^\alpha\varphi) + (-1)^{|\alpha|}\mu(f,\partial^\alpha\psi)$

$= \lambda(\partial^\alpha f,\varphi) + \mu(\partial^\alpha f,\psi)$

г) Непрерывность $\underbrace{\varphi_k \to 0 \text{ в } D}_{\text{у них общий носитель}}$, $\partial^\alpha \varphi_k \to 0$ в D

$$(\partial^\alpha f, \varphi_k) = (-1)^{|\alpha|}(f, \partial^\alpha \varphi_k) \to 0$$

Пример $f = \delta$

$$(\partial^\alpha \delta, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(\delta, \partial^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|}\varphi^\alpha(0)$$

Если есть классич. произв, то они совпадают с обобщённой.

Обозначение:

$\{\partial^\alpha f\}$ – классич. произв.

ф-ции, тела, где она $\exists$,

Если $f(x) \in C^p(G)$, то $\partial^\alpha f =$

Обобщенная ~~функц~~ производная – это обобщенная функция.

Св-во

Операция диф-я явл непрерывной, линейной из $D'(R^n)$ в $D'(R^n)$

1) Линейность

очевидно

$$\partial^\alpha(\lambda f + \mu g) = \lambda \partial^\alpha f + \mu \alpha^\alpha g, \; f, g \in D'(R^n)$$

Непрер $f_k \to 0$ в $D' \Rightarrow \partial^\alpha f_k \to 0$ в D'

$$(\partial^\alpha f_k, \varphi) = (-1)^{-|\alpha|}(f_k, \partial^\alpha \varphi) \to 0$$

Св-во 4 Результат дифф-я обобщенной ф-ции не зависит от порядка дифф-я

$\forall f \in D'$, $\partial^\alpha \partial^\beta f = \partial^\beta \partial^\alpha f$

$(\partial^\alpha \partial^\beta f, \varphi) = (-1)^{|\alpha+\beta|}(f, \partial^\beta \partial^\alpha \varphi) =$

$= (-1)^{|\alpha+\beta|}(f, \partial^\alpha \partial^\beta \varphi) = (\partial^\beta \partial^\alpha f, \varphi)$

Ф-ла Лейбница:

$$\frac{\partial(af)}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x} f + \frac{\partial f}{\partial x} a, \quad f \in D'(\mathbb{R}^n), \; a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Док-во

$$\left(\frac{\partial af}{\partial x}, \varphi\right) = -\left(af, \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = -\left(f, a\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = -\left(f, \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x}\varphi\right) =$$

$$= -\left(f, \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x}\right) + \left(f, \frac{\partial a}{\partial x}\varphi\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} f, \varphi a\right) + \left(\frac{\partial a}{\partial x} f, \varphi\right) = \left(a\frac{\partial}{\partial x} f, \varphi\right) + \left(f\frac{\partial a}{\partial x}, \varphi\right) =$$

$$= \left(a\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial a}{\partial x}, \varphi\right)$$

Св-во Если $f = 0$ в G, то $\partial^\alpha f = 0$ в G

Док-во

$(\partial^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, \partial^\alpha \varphi) = 0$, $\varphi \in D(G)$

6 Св-во

$\angle \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x)$, где $u_k(x)$ – лок. интегр. ф-ции ряд сх-ся равномерно на каждом компакте, тогда его можно почленно дифф как обобщ. ф-цию и получ. ряды произв. будут сх-ся в D'

<u>Док-во</u> $\forall R > 0$

$$S_p = \sum_{k=1}^{p} u_k(x) \rightrightarrows S(x), \; p \to \infty$$

S_p — сход. равном. на $\forall$ компакте

S_p — лок интегр

$S_p \to S$ в D'

$$\partial^\alpha S_p = \sum_{k=1}^{p} \partial^\alpha u_k \to \partial^\alpha S \quad \text{в } D', \; \partial^\alpha \text{ — непр опер-р в } D'$$

| Лекция 8 |
29.10.07

Обобщенная первообразная.

$n=1$ Пусть $f(x)$ — непр. ф-ция, тогда первообр. ф-ции $f(x)$ — это $\underline{f^{(-1)}(x) = \int f(x)\,dx + C}$

основа для опр-ния первообр. обобщ. ф-ции

<u>Опр</u> Обобщ. ф-ция $f^{(-1)}$ в $D'(R^1)$ наз-ся первообр обобщ. ф-ции $f \in D'(R^1)$ если $(f^{(-1)})' = f$, или

обобщенная производная

(1) $(f^{(-1)}, \varphi') = -(f, \varphi) \quad \forall \varphi$

Равенство (1) определено не для всех $\varphi(x) \in D(R^1)$, а только на ~~$\varphi'(x)$~~ те, которые являются производными ф-ций из $D(R^1)$

Как строить первообразную?

$\exists$ для ф-ции $f \in D'(R^1)$ определена первообразная $f^{(-1)}$. Построим её.

$$\forall \varphi \in D(R^1) \text{ верно } \varphi(x) = \psi'(x) + \omega_\varepsilon(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\,d\xi \quad (2)$$

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}}, & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| \geq \varepsilon \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega_\varepsilon(x)\,dx = 1$$

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \left[\varphi(\eta) - \omega_\varepsilon(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\,d\xi \right] d\eta \quad (*)$$

$$\psi'(x) = \varphi(x) - \omega_\varepsilon(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\,d\xi$$

Докажем, что $\psi(x) \in D(R^1)$

Ясно, что бесконечно гладкая, т.е. $\psi(x) \in C^\infty(R^1)$

Осталось док-ть, что она явл. финитной.

1) $\psi(x) = 0, \ x < -\max(\varepsilon, R)$, $\boxed{\operatorname{supp}\varphi \in [-R, R]}$

2) $x > \max(\varepsilon, R)$ $\quad \psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta)\,d\eta - \int_{-\infty}^{\infty} \omega_\varepsilon(\eta)\,d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\,d\xi = 0$

Вывод: при условии, что $|x| > \max(\varepsilon, R)$ выполнено, что $\psi(x) = 0$

$\Rightarrow$ финитна

$\Rightarrow$ $\psi(x) \in D(R^1)$

пространство основных функций

2) Применим $f^{(-1)}$ к равенству (2):

$$(f^{(-1)}, \varphi) = (f^{(-1)}, \psi') + (f^{(-1)}, \omega_\varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi$$

перепишем:

$$(f^{(-1)}, \varphi) = -(f, \psi) + C \quad (3)$$

здесь $C = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi$

Вывод: Если $f^{(-1)}$ $\exists$, то она выражается формулой (3)

где $\psi(x)$ определена формулой (*)

Способ вычисления первообразной.

1) Линейность $f^{(-1)}$ очевидна (функционала)

2) Непрерывность

Берем посл-ть $\{\varphi_k\} \to 0$ в D

т.е. $\varphi_k(x) = 0$, $|x| > R$, $\varphi_k(x) \rightrightarrows 0$ при $k \to \infty$

$$(f^{(-1)}, \varphi_k) = -\underbrace{(f, \psi_k)}_{0} + C \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\varphi_k(x)}_{0} dx \to 0$$

непрерывность функционала показана

Доказали, что $f^{(-1)} \in D'(R^1)$

3) Доказать, что $f^{(-1)}$ определенной по ф-ле (3) яв-ся первообразной ф-ции f.

$$(f^{(-1)}, \varphi') = -(f, \psi) + C \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(\xi) d\xi$$

$$\psi = \int_{-\infty}^{x} [\varphi'(\eta) - \omega_\varepsilon(\eta) \int_{R^1} \varphi'(\xi) d\xi] d\eta = \varphi(x)$$

$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(\xi) d\xi = 0$ в силу финитности $\Rightarrow (f^{(-1)}, \varphi') = -(f, \varphi)$ $\forall \varphi$

$\Rightarrow \forall$ ф-ции $\exists$ первообр., кот. можно постр. по ф-ле (3)

Теорема $\forall$ обобщ. ф-ции $f \in D'(R^1)^2$ имеет единственную ~~производную~~ (с точностью до аддитивн константы C) первообр. $f^{(-1)}$ котор. опред.

$$(f^{(-1)}, \varphi) = -(f, \psi) + (C, \varphi)$$

где $$\psi = \int_{-\infty}^{x} [\varphi(\eta) - \omega_\varepsilon(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi] d\eta$$

Следствие

$$u' = f, \quad f \in D'(R^1)$$

существ решение этого ур-я в $D'(R^1)$

$$u = f^{(-1)} + C \in D'(R^1)$$

если f — непрерывно, то обобщ. решение совпадает с классическим.

Пример 1

$\frac{1}{\varepsilon}\delta(x-\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\delta(x)$ при $\varepsilon \to +0$

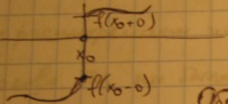
$$\lim_{\varepsilon\to+0} \left(\frac{1}{\varepsilon}\delta(x-\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\delta(x)\right) = \ ? \ = \varphi'$$

$\forall\varphi \in D(R^1)$

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\delta(x-\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\delta(x), \varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left(\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)\right) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \varphi'(0)$$

Пример 2 $f(x)$: $f \in C^1(x \le x_0)$ и $f \in C^1(x \ge x_0)$



Хотим посчитать производную от f.
(классической производной на всем R нет!)

Обозн: $[f]_{x_0} = f(x_0+0) - f(x_0-0)$

$\{f'\}$ – классическая производная (там, где $\exists$)

Докажем формулу:

$$f' = \{f'\} + [f]_{x_0}\cdot\delta(x-x_0)$$

Док-во $\forall\varphi \in D(R^1)$

$$(f',\varphi) = -(f,\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)\,dx - \int_{x_0}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = \{\text{ф-ла } \int\text{-ния по частям}\}$$

$$= -f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{x_0} + \int_{-\infty}^{x_0}\{f'(x)\}\varphi(x)\,dx - f(x)\varphi(x)\Big|_{x_0}^{\infty} +$$

$$+ \int_{x_0}^{\infty}\{f'(x)\}\varphi(x)\,dx =$$

$$= -f(x_0-0)\varphi(x_0) + f(x_0+0)\varphi(x_0) + \int_{-\infty}^{\infty}\{f'(x)\}\varphi(x)\,dx =$$

$$= [f]_{x_0}\cdot\varphi(x_0) + (\{f'(x)\},\varphi) =$$

$$= ([f]_{x_0}\delta(x-x_0) + \{f'(x)\},\varphi)$$

$$\boxed{f' = [f]_x\,\delta(x-x_0) + \{f'(x)\}}$$

Пример 3

$$\Theta = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$\Theta' = 1\cdot\delta(x)$$

Свертка обобщенных функций.

Лекция 12
26.11.07

f, g - лок интегр. и $f*g$ - лок интегр. $\{\eta_k\}$ сход к 1 в R^n

$$\int f(x)g(y)\varphi(x+y)\,dx\,dy = \lim_{k\to\infty}\int f(x)g(y)\underbrace{\eta_k(x,y)\,\varphi(x+y)}_{\eta_k(x,y)\varphi(x+y)\in D(R^{2n})}\,dx\,dy$$

Опред. свертки:

Пусть f и g принадл пр-ву $D'(R^n)$ и их прямое произв $f(x)\cdot g(y)$ допускает расширение на мн-во ф-ций вида $\varphi(x+y)$, где $\varphi\in D(R^n)$

Под расширением имеется в виду:

Какова бы ни была послед $\{\eta_k\}$ ф-ций из $D(R^{2n})$ сход к 1 в R^{2n} существ предел числ. посл

$$\lim_{k\to\infty}(f(x)\cdot g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)) = (f(x)\cdot g(y), \varphi(x+y))$$

Опр $f\in D'(R^n)$, $g\in D'(R^n)$

$$(f*g, \varphi) = (f(x)\cdot g(y), \varphi(x+y)) = \lim_{k\to\infty}(f(x)\cdot g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)),\quad \varphi\in D(R^n)$$

Утв Если $f*g$ определена, то свертка явл лин. непр. ф-лом $f*g\in D'(R^n)$ (т.е. обобщ. ф-ция)

Св-во $D'(R^n)$ явл полным. (без док-ва)

Док-во Утв $\exists$ $(f(x)\cdot g(y)), \eta_k(x,y)\varphi(x+y))$ - функционал

Видно, что линейный.
Покажем, что он непрер-вый.

$\varphi_m \to 0$ в $D(R^n)$, $m \to \infty$

$\eta_k(x,y)\varphi_m(x+y) \to 0$ в $D(R^{2n})$ (следует из финитности ф-ции $\eta_k(x,y)$)

Т.к. $f(x)\cdot g(y)$ – непр. ф-л, то

(*) $(f(x)\cdot g(y), \eta_k(x,y)\cdot\varphi_m(x+y)) \to 0$

(последовательность непр. сх-ся ф-лов непр. ф-ла следует из полноты $D'(R^n)$) ч.т.д.

<u>Свёртка</u> <u>определена</u> <u>не</u> <u>всегда</u>!

1) $f(x) = 1 \quad g(x) = 1$

2) $f(x) = 1 \quad g(x) = \theta$

$$(1 * \theta, \varphi) = \lim_{k\to\infty}(\theta, \eta_k(x,y)\varphi(x+y)) = \lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\eta_k(x,y)\varphi(x+y)\,dx\,dy =$$

(было бы $-\infty$ если $g(x) = 1$)

$$= \lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\eta_k(x, z-x)\varphi(z)\,dx\,dz$$

$$\underbrace{\int_0^{\infty} 1\,dx}_{\text{расходится!}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(z)\,dz$$

существовали бы, если $\exists$

<u>Св-ва свёртки:</u>

① $\underline{f * \delta = \delta * f = f}$

<u>Док-во:</u> $\exists\ \varphi \in D(R^n)$, $\{\eta_k\} \to 1$, $\eta_k \in D(R^{2n})$

Ясно, что $\eta_k(x,0)\varphi(x) \to \varphi(x)$ в $D(R^n)$ при $k\to\infty$.

(Следует из того, что $\eta_k(x,y) \to 1$.)

$$(f*\delta,\varphi) = \lim_{k\to\infty}(f(x)\cdot\delta(y), \underbrace{\eta_k(x,y)\varphi(x+y)}_{\in D(R^n)}) =$$

$=\{$по св-вам прямого произведения$\}=$

$$=\lim_{k\to\infty}(f(x), \eta_k(x,0)\varphi(x)) = (f,\varphi)$$

$f*\delta = \delta*f$ следует из комутативности прямого произведения.

ч.т.д.

② Комутативность свертки:

Если $\exists\ f*g$, то

$$f*g = g*f.$$

Док-во: $\varphi\in D(R^n)$

$(f*g,\varphi) = \lim\limits_{k\to\infty}(f(x)\cdot g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)) = \{$по св-вам прямого произведения$\} =$

$$=\lim_{k\to\infty}(g(y)\cdot f(x), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)) = (g*f,\varphi)$$

ч.т.д.

③ Дифференцируемость свертки:

Если $\exists$ свертка $f*g$, то $\partial^\alpha f*g$ и $f*\partial^\alpha g$ сущест., причём

$$\partial^\alpha f*g = \partial^\alpha(f*g) = f*\partial^\alpha g$$

Док-во: Проведем док-во для ∂_j $(\alpha=1)$

$\exists\, \varphi \in D(R^n)$, $\{\eta_k\}$ – сход к 1 в $D(R^{2n})$. Тогда ясно, что

$\eta_k + \dfrac{\partial \eta_k}{\partial x_j}$ – сх-ся к 1 в $D(R^{2n})$

0 вне носителя и там, где $\eta_k = 1$.

Свертка $\exists \Rightarrow f*g \in D'(R^n)$

$$(\partial_j(f*g), \varphi) = -(f*g, \partial_j\varphi) = -\lim_{k\to\infty}\left(f(x)\cdot g(y), \eta_k(x,y)\frac{\partial\varphi(x+y)}{\partial x_j}\right) =$$

$$= -\lim_{k\to\infty}\left(f(x)\cdot g(y), \frac{\partial \eta_k\cdot\varphi(x+y)}{\partial x_j} - \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j}\varphi(x+y)\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}[f(x)\cdot g(y)], \eta_k\cdot\varphi(x+y)\right) + \underbrace{\lim_{k\to\infty}\left(f(x)\cdot g(y), \left(\eta_k + \frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\right)\cdot\varphi(x+y)\right)}_{\to 1} -$$

$$\underbrace{-\lim_{k\to\infty}\left(f(x)\cdot g(y), \eta_k\,\varphi(x+y)\right)}_{\downarrow 1} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\partial_j f(x)\cdot g(y), \eta_k(x,y)\,\varphi(x+y)\right) + \cancel{(f*g,\varphi)} - \cancel{(f*g,\varphi)} =$$

$$= (\partial_j f*g, \varphi)$$

Док-ли, что $\underbrace{\partial_j(f*g) = \partial_j f*g}$ $= \partial_j(g*f) = \partial_j g*f =$

$= f*\partial_j g$

ч.т.д.

„Плохие свойства свертки"

① Свёртка $\exists$ не для $\forall$ $f, g \in D'(R^n)$

② $\exists$ $\exists$ $\partial^\alpha f * g$ и $f * \partial^\alpha g$, $\exists$ ли $f * g$?

Не всегда!

Пример: Ф-ции $f = \theta$, $g = 1$.

$\theta' * 1 = \delta * 1 = 1$

$\theta * 1' = \theta \cdot 0 = 0$

Если $f * g$ $\exists$, то $1 = 0$. $\Rightarrow f * g$ не $\exists$!!!

③ Отсутствие ассоциативности

Пример

$(\theta * g) * 1 = \theta' * 1 = \delta * 1 = 1$

$\theta * (\delta' * 1) = \theta * 0 = 0$

Некоторые дост. условия существования свёртки.

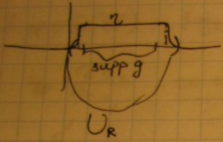
Теорема $f \in D'(R^n)$, $g \in D'(R^n)$ и g имеет комп. носитель (финитная)

Тогда $\exists$ $f * g$ в $D'(R^n)$ и

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \cdot g(y), \eta(y) \varphi(x+y)), \quad \varphi \in D(R^n)$$

η - $\forall$ основная ф-ция равная 1 в нек окрест носителя g.

Док-во Пусть $\operatorname{supp} g \subset U_R$ (шар) η - ф-ция из $D(R^n)$ равная 1 в окрест. $\operatorname{supp} g$ и $\operatorname{supp} \eta \subset U_R$



$\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset U_A$

т.к. она финитная

Тогда $\forall$ φ-ции $\eta(y)\eta_k(x,y)\varphi(x+y) =$

$= \eta(y)\varphi(x+y)$ начиная с дост. большого k.

мн-во, в кот лежит носитель этой ф-ции

$$\{(x,y):\ |x+y| \le A,\ |y| \le R^2\} \subset \overline{U}_{A+R} \times \overline{U}_R$$

(оно огр-но и компакте, сейчас покажем)

Ясно, что $\eta(y)\varphi(x+y) \in D(\mathbb{R}^{2n})$

Заметим (напомним): $g = \eta g$.

$$(f*g,\varphi) = \lim_{k\to\infty}\big(f(x)\cdot g(y),\ \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\big) = \lim_{k\to\infty}\big(f(x)\cdot \eta(y)\cdot g(y),\ \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\big) = \lim_{k\to\infty}\big(f(x)\cdot g(y),\ \underbrace{\eta(y)\eta_k(x,y)\varphi(x+y)}_{\text{в пределе } \eta(y)\varphi(x+y)}\big) =$$

$$= \big(f(x)\cdot g(y),\ \eta(y)\varphi(x+y)\big)$$

$\boxed{\text{ч.т.д.}}$

4 „Плохое" св-во свертки

Нахождение фундаментальных и обобщенных решений.

Лекция 1

25.02.08.

Фундаментальные решения дифф. операторов с постоянными коэф.

$$L = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha \partial^\alpha$$

Опр Фундаментальным решением операт. L называется $\mathcal{E} \in D'(R^n)(S'(R^n))$ удовл. ур-ю

$$L(\partial)\mathcal{E} = \delta(x)$$

Если $\mathcal{E}$ является фунд. решением опр-ра L, то выполнено равенство.

$$L(-i\xi) F[\mathcal{E}] = 1. \quad \text{(преобр. Фурье)}$$

$$F[\mathcal{E}] = \frac{1}{L(-i\xi)}$$

$$L(-i\xi) = P(\xi)$$

$$P(\xi) X = 1 \qquad \xi - \text{действ. переменная}$$

$$X = \frac{1}{P(\xi)} \qquad (1)$$

У ур-я $P(\xi) = 0$ м.б. решения, а м.б. и нет.

Если корней нет, то обратное ПФ и находим решение.

Если корни есть

$N_P = \{\xi : P(\xi) = 0\}$

$N_P = \varnothing \Rightarrow$ решение ур-я (1) единственно

Если $N_P \neq \varnothing$ то решения отличаются друг от друга на функции, носители которых содерж. в N_P

Вопрос к Экзамену Много ли таких функций?

δ-функции, их производные. Других нет

$\xi X = 1$

Решение.

$\frac{1}{\xi + i0}$, $\frac{1}{\xi - i0}$, $\mathcal{P}\frac{1}{\xi}$ отличаются на δ-функции.

Хермандер

Фун. Решение д-ф оператора $L(\partial)$ $\exists$ в D', если $L(\xi) \not\equiv 0$.

$L(\partial)E = \delta$

преоб. Фур. $F[E] = \text{reg}\, \frac{1}{L(-i\xi)}$ - все решения

все решения отлич. от на функции, носители кот содерж. N_P

$L(\partial)u = f$ (3) $f \in D'$ или S' - пр-во медленно растущих обобщенных функций

В прошлый раз доказали теорему:

<u>Теорема</u> $\exists$ $\mathcal{E}$ - фунд. решение опер. $L(\partial)$ и в D' $\exists$ свертка $\mathcal{E} * f$, тогда решения ур-я (3) представимо в виде

$$u = \mathcal{E} * f$$

и оно существует и единственно в классе функций из D' для кот. определена свертка $\mathcal{E}$

<u>Следствие</u> Если $u \in D'$ и $u * \mathcal{E}$ $\exists$ в D', то справедл. равенство $u = (L(\partial)u) * \mathcal{E}$

$$u = u * \delta = u * (L(\partial)\mathcal{E}) = (L(\partial)u) * \mathcal{E}$$

Фундам. решения обыкновенных диф. ур-й с постоянным коэф

$$L\mathcal{E} = \frac{d^n \mathcal{E}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}\mathcal{E}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n \mathcal{E} = \delta(t)$$

покажем, что функция $\theta(t) z(t)$, где $z(t)$ - решения однородного ур-я

$$Lz = 0$$

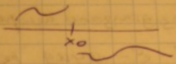
$$z(0) = \dots = z^{(n-2)}(0) = 0$$

$$z^{(n-1)}(0) = 1$$

$\theta(t)$: $t > 0 = 1$, $t \leq 0 = 0$

явл. фунд. реш. опер-ра $L(\partial)$

Проверим f - имеет разрыв в точке x_0
в ост. она дифф.



$$f'(x) = \{f'(x)\} + [f]_{x_0}\,\delta(x-x_0)$$ — обобщенная производная разрывной функции

$$[f]_{x_0} = f(x_0+0) - f(x_0-0)$$ — скачок

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{E}'(t) &= \theta(t) Z'(t)\\
\mathcal{E}''(t) &= \theta(t) Z''(t)\\
\mathcal{E}^{(n-1)}(t) &= \theta(t) Z^{(n-1)}(t)\\
\mathcal{E}^{(n)} &= \theta(t) Z^{(n)}(t) + \delta(t)
\end{aligned}\right\}$$ подставляем в ур-е $\Rightarrow$

$$\Rightarrow L\mathcal{E} = \theta L Z + \delta(t)$$

$\mathcal{E}$ – фун. реш. опер-ра L.

Пример

$$L_1 = \frac{d}{dt} + a, \quad L_2 = \frac{d^2}{dt^2} + a^2$$

$$\mathcal{E}_1 = \theta(t) e^{-at}$$

$$\mathcal{E}_2 = \theta(t)\frac{\sin at}{a}$$

Оператор теплопроводности

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - a^2 \Delta \mathcal{E} = \delta(x,t)$$

П.Ф. по x: $\quad F_x\left[\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\right] - a^2 F_x[\Delta \mathcal{E}] = F_x[\delta(x,t)]$

$$\delta(x,t) = \delta(x)\cdot\delta(t)$$

$$F_x[\delta(x,t)] = F_x[\delta(x)\cdot\delta(t)] = 1(\xi)\cdot\delta(t)$$

$$F_x\left[\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t} F_x \mathcal{E}$$

$$F_x[\Delta \mathcal{E}] = -|\xi|^2 F_x[\mathcal{E}] \qquad \overline{\mathcal{E}} = F[\mathcal{E}]$$

$$\frac{\partial \overline{\mathcal{E}}(\xi,t)}{\partial t} + a^2|\xi|^2\,\overline{\mathcal{E}}(\xi,t) = 1(\xi)\cdot\delta(t)$$

получаем ОДУ по t.

$\frac{d}{dt} + a$ – получили типа того опер-р

$a = a^2|\xi|^2$.

Решение: $\quad \overline{\mathcal{E}}(x,t) = \theta(t)\, e^{-a^2|\xi|^2 t}$

$$\mathcal{E}(x,t) = F_\xi^{-1}[\overline{\mathcal{E}}](x,t) =$$

$$= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^n} \underbrace{\int e^{-a|\xi|^2 t - i(x,\xi)}}_{\int \text{Пуассона}} d\xi =$$

$$\boxed{= \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}}$$

Фундаментальное решение для ур-я теплопроводности

Лекция 2 **Метод спуска**

$(x,t) \in R^{n+1}$

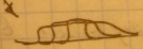
Лин диф уравнение с пост. коэф

$$L\left(\partial, \frac{\partial}{\partial t}\right) u = f(x)\cdot\delta(t), \quad f(x) \in D'(R^n)$$

где

$$L\left(\partial, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{q=1}^{p} \frac{\partial^q}{\partial t^q} L_q(\partial_x) + L_0(\partial_x)$$

Опр (напомним) Функция $u \in D'(R^{n+1})$ допускает продолжение на ф-ции вида $\varphi(x)\cdot 1(t)$, где $\varphi(x) \in D(R^n)$ если $\forall$ посл основных функций $\{\eta_k(t)\}$ сх-ся в R^1 к 1 вып след равенство:



$$\exists \lim_{k\to\infty} (u, \varphi(x)\eta_k(t)) = (u, \varphi(x)\cdot 1(t))$$

Опр u_0 - продолж ф-ции $u(x,t)$

$\forall \varphi \in D(R^n)$

$$(u_0, \varphi) = (u, \varphi(x)\cdot 1(t)) = \lim_{k\to\infty} (u, \varphi(x)\cdot\eta_k(t))$$

u - лин непр функ-л на $D(R^n)$

$u_k = (u, \varphi(x)\cdot\eta_k(t))$ - посл. непр сим. функ-в в $D(R^n)$

$u_k \in \underbrace{D'(R^n)}_{\text{полное пр-во}} \Rightarrow u_0 \in D'(R^n)$

Примеры построения u_0

Пример 1

$u(x,t)$ - локально-интегр. в R^{n+1}

$\exists \int |u(x,t)|dt$ является лок интегр ф-цией. тогда

$$\boxed{u_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dt}$$

Док-во $\varphi(x) \in D(R^n)$

$$\lim_{k\to\infty} (u, \varphi(x)\eta_k(t)) = \lim_{k\to\infty} \int u(x,t)\varphi(x)\eta_k(t)\,dx\,dt =$$

$$= \int u(x,t)\varphi(x)\,dx\,dt = \int u(x,t)\varphi(x)\,dx\,dt = \int \varphi(x) \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx\,dt$$

Пример 2

$\exists\ u = f(x)\cdot\delta(t),\ f(x) \in D'(R^n)$

Тогда $\boxed{u_0 = f}$

Док-во $(u_0, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (u, \varphi(x)\eta_k(t)) = \lim_{k\to\infty} (f(x)\cdot\delta(t), \varphi(x)\eta_k(t)) =$

$$= \lim_{k\to\infty} (f(x), \varphi(x)\eta_k(0)) = (f(x), \varphi(x)) \Rightarrow f(x) = u_0$$

Теорема (на ней основан метод спуска)

Если решение $u \in D'(R^{n+1})$ ур-я $L(\partial, \frac{\partial}{\partial t})u = f(x)\cdot\delta(t)$

допускает продолже

$$(u_0, \varphi) = \lim_{k\to\infty}(u, \varphi(x)\eta_k(t)),$$ то обобщенная ф-ция u_0

явл. решением ур-я

$$L_0(\partial)u_0 = f$$

Док-во $\eta_k(t)$ сход в R^1 к 1,

$\eta_k(t) + \eta_k^{(q)}(t)$ - сходится к 1 в R^1

$$\measuredangle \lim_{k\to\infty}(u, \varphi(x)\eta_k^{(q)}(t)) = \lim_{k\to\infty}(u, \varphi(x)(\eta_k(t) - \eta_k^{(q)}(t)) -$$

$$-\lim_{k\to\infty}(u, \varphi(x)\eta_k(t)) = 0$$

$L_0(\partial)u_0 = f$ - док-ть.

$$\measuredangle (L_0(\partial)u_0, \varphi) = (u_0, L_0(-\partial)\varphi) = \lim_{k\to\infty}(u, L_0(-\partial)\varphi(x)\eta_k(t)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}(u, L_0(-\partial)\varphi(x)\eta_k(t) + \underbrace{\sum_{q=1}^{p}(-1)^q L_q(-\partial)\varphi(x)\eta_k^{(q)}(t)}_{\text{ничего не добавим, т.к. } \lim(u, \ldots) = 0}) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}(u, L(-\partial, -\frac{\partial}{\partial t})\varphi(x)\eta_k(t)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}(L(\partial, \frac{\partial}{\partial t})u, \varphi(x)\eta_k(t)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}(f(x)\cdot\delta(t), \varphi(x)\eta_k(t)) = (f, \varphi)$$ ч.т.д.

Метод спуска, т.к. опускаемся по переменной t.

Если $\mathcal{E}$ – лок. интегр. по x и t, что и явл. ф.р. операт. $L(\partial, \frac{\partial}{\partial t})$, то

$\mathcal{E}_0$ – продолжение $\mathcal{E}$ явл. ф.р. опер $L_0(\partial)$ и

$$\mathcal{E}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(x,t)\,dt$$

Оператор Лапласа

$$\Delta \mathcal{E}_n = \delta(x)$$

$$-|\xi|^2 F[\mathcal{E}_n] = 1 \qquad F^{-1}\left[-\frac{1}{|\xi|^2}\right]$$

$n=2$ $$\left(P\frac{1}{|\xi|^2}, \varphi(\xi)\right) = \int_{|\xi|<1} \frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{|\xi|^2}\,d\xi + \int_{|\xi|>1} \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|}\,d\xi$$

~~вде~~ этот $\int$ не $\exists$ только в одномерном случае. Всегда $\exists$, т.к. ф-ция финитная

$$F\left[P\frac{1}{|x|^2}\right] = -2\pi \ln|\xi| - 2\pi C_0$$

$$\Delta \quad \left(|\xi|^2 P\frac{1}{|\xi|^2}, \varphi\right) = \left(P\frac{1}{|\xi|^2}, |\xi|^2\varphi\right)^{n+1} = \int_{|\xi|<1} \frac{\cancel{|\xi|^2}\varphi(\xi) - |\xi|^2\varphi(\xi)\big|_{\xi=0}}{\cancel{|\xi|^2}}\,d\xi +$$

$$+\int_{|\xi|>1} \frac{|\xi|^2\varphi(\xi)}{|\xi|^2}\,d\xi = \int_{R^2} \varphi(\xi)\,d\xi = (1,\varphi)$$

$$F[\mathcal{E}_2] = \text{reg}\left[-\frac{1}{|\xi|^2}\right] = -P\frac{1}{|\xi|^2}$$

$$\mathcal{E}_2 = F^{-1}\left[-P\frac{1}{|\xi|^2}\right] = -\frac{1}{4\pi^2} F\left[P\frac{1}{|\xi|^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\ln|x| + \frac{C_0}{2\pi}$$

константа лежит в ядре этого оператора.

$$\boxed{\mathcal{E}_2 = \frac{1}{2\pi}\ln|x|}$$ ф.р.

$\boxed{n=3}$ $$F\left[\frac{1}{|x|^2}\right](\xi) = \frac{2\pi^2}{|\xi|}$$

$$\mathcal{E}_3 = -F^{-1}\left[\frac{1}{|\xi|}\right](x) = -\frac{1}{(2\pi)^3} F\left[\frac{1}{|\xi|^2}\right](x) =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{|x|}$$ ф.р. опер-ра Лапласа в 3-х мерном случае.

12
12
24

$\boxed{\text{Лекция 3}}$ Фундаментальное решение опер. Лапласа

10.03.08

$n=2$ $\mathcal{E}_2 = \frac{1}{2\pi}\ln|x|$

$n=3$ $\mathcal{E}_3 = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|x|}$

Ур-е ~~теплопр~~ теплопр:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - a^2\Delta\mathcal{E} = \delta(x,t)$$

Решение кот.: $$\mathcal{E}_n(x,t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}$$ ф.р.

n-размерность пр-ва

$n > 3$

$\mathcal{E}_n$ $\forall n$ - локально интегрируема

$$\mathcal{E}_n(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_n(x,t)\,dt$$ - применение метода спуска $=$

$$= -\int_0^{\infty} \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dt = \left\{ \frac{|x|^2}{4t} = u \right\} = -\frac{|x|^{-n+2}}{4\pi^{n/2}} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-u} u^{\frac{n}{2}-2}\,du}_{\text{гамма-функция}} =$$

$$= -\frac{|x|^{-n+2}}{4\pi^{n/2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right) = -\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{n/2}(n-2)} |x|^{-n+2} =$$

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \Gamma(\alpha), \quad \alpha > 0$$

$$\boxed{\Gamma(\alpha+1) = \Gamma(\alpha)\cdot\alpha}$$ формула приведения

$$= \{\text{окончательно получим}\} = -\frac{1}{n-2} \frac{|x|^{-n+2}}{\sigma_n}, \text{ где}$$

$$\sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$ - площадь поверхности единичной сферы

Оператор Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)\mathcal{E}_n = \delta(x)$$

$$\mathcal{E}_3(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}, \quad \overline{\mathcal{E}_3} = \frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|}$$

$$\mathcal{E}_1(x) = \frac{1}{2ik} e^{ik|x|}, \quad \overline{\mathcal{E}_1}(x) = -\frac{1}{2ik} e^{-ik|x|}$$

Фундаментальное решение волнового оператора

$$\Box_a = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta\right), \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta\right)\mathcal{E}_n(x,t) = \delta(x,t) =$$

Преобр Фурье: $\frac{\partial^2 \bar{\mathcal{E}}_n(\xi,t)}{\partial t^2} + a^2|\xi|^2 \bar{\mathcal{E}}_n(x,t) = 1(\xi)\cdot\delta(t)$

ОДУ по t

$$\frac{d^2}{dt^2} + a^2 \to \text{ф.р. } \Theta(t)\frac{\sin at}{a}$$

$$\Rightarrow \bar{\mathcal{E}}_n(\xi,t) = \Theta(t)\frac{\sin a(\xi)t}{a(\xi)}$$ нашли ф.р. в образах Фурье для волнового опер-ра

Обр. Преоб. Фурье:

$$\mathcal{E}_n(x,t) = F_\xi^{-1}[\bar{\mathcal{E}}_n](x,t) = \Theta(t)\,F_\xi^{-1}\left[\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}\right]$$

Покажем, что

$$F_\xi^{-1}\left[\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}\right] = \frac{1}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x)$$

простой слой для сферы с радиусом at

$$(\delta_{S_{at}}, \varphi) = \int_{S_{at}} \varphi\, ds$$

Носитель $\delta_{S_{at}}$ – сама сфера S_{at}

покажем $R = \cancel{a|\xi|}\ at$

$$F[\delta_{S_R}](\xi) = 4\pi R\,\frac{\sin R|\xi|}{\cancel{a}|\xi|}$$

Напомним

$\exists$ f - финитная ф-ция с носителем M

тогда

$$F[f](\xi) = (f(x), \eta(x)e^{i(\xi,x)})$$

$\eta(x)$ - основная ф-ция, равная 1 в нек окр M

$$F[\delta_{S_R}](\xi) = (\delta_{S_R}(x), \eta(x)e^{i(\xi,x)}) = \int_{S_R} \eta(x) e^{i(\xi,x)} dS_R$$

поверхностный
$\int$.

~~$F[\delta_{S_R}](\xi) = 4\pi R$~~

$$= R^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} e^{iR|\xi|\cos\theta} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 4\pi R \frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}$$

что и требовалось получить

$n=3$ $\qquad \mathcal{E}_3(x,t) = \dfrac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x)$

$$(\mathcal{E}_3, \varphi) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{\infty} (\delta_{S_{at}}, \varphi) \frac{dt}{t} = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{t} \int_{S_{at}} \varphi(x,t) \, dS \, dt$$

$$F[\theta(R-|x|)(\xi)] = 2\frac{\sin R\xi}{\xi} \qquad n=1$$

$$F\left[\frac{\theta(R-|x|)}{\sqrt{R^2-|x|^2}}\right](\xi) = 2\pi \frac{\sin R|\xi|}{|\xi|} \qquad n=2$$

Следовательно

$$n=1 \qquad F_\xi^{-1}\left[\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}\right] = \frac{1}{2a}\theta(at-|x|)$$

$$\mathcal{E}_2(x,t) = \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\theta(at-|x|)}{\sqrt{(at)^2-|x|^2}}\right]$$

$$\mathcal{E}_1(x,t) = \frac{1}{2a}\theta(at-|x|)$$

$$\mathcal{E}_3 = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x)$$

Запомнить, то очень хорошо.

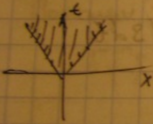
$$(\mathcal{E}_3,\varphi) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^\infty \frac{1}{t}\int_{S_{at}} \varphi(x,t)\,dS\,dt = \left\{t \to \frac{|x|}{a}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^\infty \frac{a}{|x|}\int_{S_{|x|}} \varphi\left(x,\frac{|x|}{a}\right)dS\,d\frac{|x|}{a} =$$

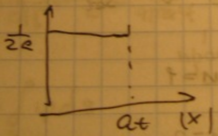
$$= \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^\infty \int_{S_{|x|}} \frac{\varphi\left(x,\frac{|x|}{a}\right)}{|x|}\,dS\,d|x| = \frac{1}{4\pi a^3}\int_{R^3}\frac{\varphi\left(x,\frac{|x|}{a}\right)}{|x|}\,dx$$

Носители $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$

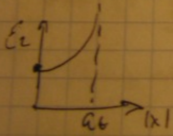
$at-|x| \geq 0$ конус будущего

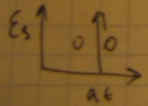


Носитель $\mathcal{E}_3$ – сфера



Нарисуем $\mathcal{E}_1$





Пусть $f(x,t) \in D'(R^{n+1})$, $\varphi(x) \in D(R^n)$

Введем обобщ. ф-цию $(f(x,t), \varphi(x))$ опред.

след. образом $\forall\ \psi \in D(R^1)$

$$((f(x,t), \varphi(x)), \psi(t)) = (f, \varphi\psi)$$

Св-во

$$\left(\frac{\partial^k f(x,t)}{\partial t^k}, \varphi(x)\right) = \frac{d^k}{\partial t^k}(f(x,t), \varphi(x))$$

Док-во

$$\left(\frac{d^k}{dt^k}\{(f(x,t)\}, \varphi(x)), \psi(t)\right) = (-1)^k\left((f(x,t), \varphi(x)), \frac{d^k\psi}{dt^k}\right) =$$

$$= (-1)^k\left(f, \varphi\frac{d^k\psi}{dt^k}\right) = \left(\left(\frac{\partial^k f(x,t)}{\partial t^k}, \varphi(x)\right), \psi(t)\right)$$ ч.т.д.

Опр

$f(x,t) \in C^p$, $0 \le p \le \infty$

по t на (a,b) если $\forall\ \varphi \in D(R^n)$

ф-ция $(f(x,t), \varphi(x)) \in C^p(a,b)$ регулярная ф-ция

Волновой потенциал 2 лекции

Уравнения математической физики Владимиров, Жаринов

Лекция 6

Обобщенное решение обыкновенных дифф. ур-ий

и волнового уравнения.

$$\begin{cases} Lu = u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \ldots + a_n u = f(t), \ t > 0. \quad (1) \\ u^{(k)}(0) = u_k, \ k = 0, 1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Постановка задачи Коши.

Строим обобщ. решение

$\tilde{u}(t), \tilde{f}(t)$ - продолжение ф-ций $u(t)$ и $f(t)$

нулём при $t<0$.

В нуле м.б. разрывы.

$$u^{(k)}(t) = \{u^{(k)}(t)\} + \sum_{j=0}^{k-1} u_j \delta^{(k-1-j)}(t)$$

производ

Было в прошлый раз.

$$L\tilde{u} = \{L\tilde{u}\} + \sum_{j=0}^{n-1} u_j \delta^{(n-1-j)} + a_1 \sum_{j=0}^{n-2} u_j \delta^{(n-2-j)} + \ldots a_{n-1} u_0 \delta(t) =$$

$$L\tilde{u} = \{L\tilde{u}\} + u_0 \delta^{(n-1)}(t) + (u_1 + a_1 u_0)\delta^{(n-2)}(t) + (u_2 + a_1 u_1 + a_2 u_0)\delta^{(n-3)}(t) + \ldots + (u_{n-1} + a_1 u_{n-2} + \ldots + a_{n-1} u_0)\delta(t) = \tilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta^{(k)}(t)$$

где: $C_0 = (u_{n-1} + a_1 u_{n-2} + \ldots + a_{n-1} u_0)$

$C_{n-2} = u_1 + a_1 u_0$

$C_{n-1} = u_0$

Задача Коши перешла в следующую задачу:

$$L\tilde{u} = \tilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta^{(k)}(t) \qquad (2)$$

Вывод: продолжение классич. решения задачи Коши (1) в обобщенном смысле удовлетв. ур-ию (2)

Фундаментальное решение оператора L это

$\mathcal{E}(t) = \Theta(t)\, Z(t)$, где $Z(t)$ - решение ур-я $LZ = 0$,

причем $Z(0) = Z'(0) = \ldots = Z^{(n-2)}(0) = 0$,

$Z^{(n-1)}(0) = 1$.

Ясно, что $\tilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta^{(k)}(t) \in D'_+$, $\Theta(t) \cdot Z(t) \in D'_+$

D'_+ - сверточная алгебра (ассоциативность!)

$\Downarrow$ определена свертка

$$\mathcal{E}(t) * \left(\tilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta^{(k)}(t)\right)$$

$\Rightarrow$ решение этой задачи $\exists!$ в D'_+

$$\tilde{u} = \mathcal{E}(t) * \left(\tilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta^{(k)}(t)\right)$$

$\boxed{\mathcal{E}, \tilde{f} \text{ - локально интегрируемы}}$

$$\tilde{u} = \mathcal{E} * \left(\tilde{f} + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta^{(k)}\right) = \mathcal{E} * \tilde{f} + \mathcal{E} * \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta^{(k)} =$$

$$= \int_{0}^{\infty} \Theta(t-\tau) Z(t-\tau) \tilde{f}(\tau)\, d\tau + \Theta(t) \sum_{k=0}^{n-1} C_k Z^{(k)}(t) =$$

R^1

использовали, что $\mathcal{E}^{(k)} = \Theta(t) \cdot Z^{(k)}(t)$, $k = 0, \ldots, n-1$

$$= \int_0^t \Theta(t) Z(t-\tau) \tilde{f}(\tau)\, d\tau + \Theta(t) \sum_{k=0}^{n-1} C_k Z^{(k)}(t)$$

$$\boxed{u(t) = \int_0^t Z(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} C_k Z^{(k)}(t)}$$

Вывод. Решение задачи Коши (1) продолженное нулём опред. по формуле

$$\tilde{u}(t) = \Theta(t)\int_0^t \mathcal{E}(t-\tau)\tilde{f}(\tau)\,d\tau + \Theta(t)\sum_{k=0}^{n-1} C_k\, \mathcal{E}^{(k)}(t)$$

и удовл. ур-ю (2).

в них заложены начальные условия

Все классические условия решения сюда включаются.

Пример 1.

$$u' + au = f(t), \quad u(0) = u_0$$

$$\mathcal{E}(t) = \Theta(t)\cdot e^{-at} \quad n=1$$

$$u(t) = \int_0^t e^{-a(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau + \sum u_0 e^{-at}$$

Пример 2

$$u'' + a^2 u = f(t) \quad \mathcal{E}(t) = \Theta(t)\cdot\frac{\sin at}{a} \quad n=2$$

$$u(t) = \int_0^t \frac{\sin a(t-\tau)}{a} f(\tau)\,d\tau + u_1\frac{\sin at}{a} + u_0\cos at$$

Обобщенное решение задачи Коши для волнового ур-я

$$\Box_a u = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta\right)u(t,x) = f(t,x), \quad t>0$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x)$$

$$f \in C(t \geq 0) \quad u_0 \in C^1(R^n)$$

$$u_1 \in C(R^n)$$

Ищем классическое решение в классе $C^2(t>0)\cap C^1(t\geq 0)$

1. Продолжим ф-ции $u(x,t)$, $f(x,t)$ нулём в область $t<0$

$$\tilde u = \begin{cases} u, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}, \qquad \tilde f = \begin{cases} f, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

Покажем, что ф-ция $\tilde u$ удовл. ур-ю

$$\Box_a \tilde u = \tilde f(x,t) + u_0(x)\,\delta'(t) + u_1(x)\,\delta(t)$$

<u>Док-во</u> $\varphi\in D(R^{n+1})$

$$(\Box_a \tilde u, \varphi) = (\tilde u, \Box_a\varphi) = \cancel{\int_{R^n}\int_0^\infty u\,\Box_a\varphi\,dx\,dt} = \int_0^\infty\int_{R^n} u\,\Box_a\varphi\,dx\,dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty\int_{R^n} u\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - a^2\Delta\varphi\right)dx\,dt =$$

$$\int_\varepsilon^\infty u\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\,dt = -u(x,\varepsilon)\frac{\partial\varphi(x,\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial u(x,\varepsilon)}{\partial t}\varphi(x,\varepsilon) + \int_\varepsilon^\infty \varphi\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dt$$

2 раза по частям

$\int u\,dv = uv| - \int v\,du$

$$= \lim \int_\varepsilon\int_{R^n}\overbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u\right)}^{f}\varphi\,dx\,dt - \int_{R^n} u(x,\varepsilon)\frac{\partial\varphi(x,\varepsilon)}{\partial t}dx +$$

$$+ \int_{R^n}\frac{\partial u(x,\varepsilon)}{\partial t}\varphi(x,\varepsilon)\,dx =$$

$$= \int_0\int_{R^n} f\varphi\,dx\,dt - \int_{R^n}\frac{\partial\varphi(x,0)}{\partial t}u(x,0)\,dx + \int_{R^n}\varphi(x,0)\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}dx =$$

$$= \int_{R^{n+1}}\tilde f\varphi\,dx\,dt - \int_{R^n}\frac{\partial\varphi(x,0)}{\partial t}u_0(x)\,dx + \int_{R^n}u_1(x)\varphi(x,0)\,dx =$$

$= \left(f_+ u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t), \varphi(x,t) \right)$

ч.т.д.

Опр Обобщ. задачей Коши для волнового ур-я с источником $F(x,t) \in D'(R^{n+1})$ называется задача о нахождении решения обобщенной ф-ции, $u \in D'(R^{n+1})$ обращающ. в ноль при $t<0$ и удовлетв. уравнению $\Box_a u = F(x,t)$, $F(x,t) = 0$ при $t<0$.

Уравнение

$\Box_a u = F(x,t)$, $F(x,t) = 0$ $t<0$

Эквивалентная форма:

$(\Box_a u, \varphi) = (F, \varphi)$

Ур-ние $(u, \Box_a \varphi) = (F, \varphi)$ имеет решение $u(x,t) \in D'(R^{n+1})$, $u(x,t) = 0$ при $t<0$, если $F(x,t) = 0$ при $t<0$

Докажем достаточность этого усл-я

Теорема Пусть $f(x,t) \in D'(R^{n+1})$ обращается в ноль при $t<0$, тогда решение уравнения $\Box_a u = F(x,t)$ $\exists u!$ в классе функций, обращающихся в ноль при $t<0$.

: $u = \mathcal{E}_n * F$ – волновой потенциал

Док-во

$\mathcal{E}_n$ – носитель в $\overline{\Gamma}^+$ – конус будущего

$F(x,t)$ – обр. в ноль при $t<0$

$\Rightarrow \exists\ \mathcal{E}_n * F = u$

$u(x,t)=0$ при $t<0$

ч.т.д.

Повторение

Задача Коши для волнового оператора и обобщенная задача Коши

Лекция 7
25.03.08

$$\left.\begin{aligned} &\square_a u = f, \quad f(x,t)\in C(t\geq 0)\\ &u(x,0)=u_0(x) \quad u\in C^2(t>0)\cap C^1(t\geq 0)\\ &u_t(x,0)=u_1(x)\\ &u_0(x)\in C^1(R^n) \quad u_1(x)\in C(R^n)\end{aligned}\right\}$$ Классическая задача Коши.

Классические решения должны содержаться среди обобщенных.

Обобщенная задача Коши для ~~обобщенного~~ волнового оператора

$$\left.\begin{aligned} &\square_a \tilde{u} = F(x,t)\\ &F(x,t)\in D'(R^{n+1}): F(x,t)=0 \text{ при } t<0\\ &\tilde{u}(x,t)\in D'(R^{n+1}): \tilde{u}(x,t)=0 \text{ при } t<0.\end{aligned}\right\}$$ более общая постановка. (обобщение)

$$F(x,t) = \tilde{f}(x,t) + u_0(x)\,\delta'(t) + u_1(x)\,\delta(t)$$

Утв
$\forall$ $u \in C^2(t>0) \cap C^1(t\geq 0)$
$\square_a u \in C(t\geq 0)$
$u(x,t)=0 \quad t<0$
} (1)

$$\square_a u = \{\square_a u\} + u(x,0)\delta'(t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\delta(t) \quad (2)$$

действие классич. оператора на волновую функцию

$\square_a \tilde{u} = \tilde{f}$

$\square_a \tilde{u} = \tilde{f}(x,t) + u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t)$

Выполнено $\forall$ функции, такой, что (1)

Следствие 1 Всякая функция $u \in C^1(t\geq 0) \cap C^2(t>0)$ такая, что $\square_a u \in C(t\geq 0)$ и обращающаяся в нуль при $t<0$ представима в виде:

$$u(x,t) = V_n(x,t) + V_n^{(0)}(x,t) + V_n^{(1)}(x,t) \quad (*)$$

плотность $V_n(x,t)$ равна $\{\square_a u\}$
плотность поверхностного потенциала простого слоя $V_n^{(0)}(x,t)$ равна $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$

плотность поверхностного потенц. двойного слоя $V_n^{(1)}(x,t)$ равна $u(x,0)$

Док-во
Решение ур-я (2):

$$u(x,t) = \left(\{\square_a u\} + u(x,0)\delta'(t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\delta(t)\right) * \mathcal{E}_n(x,t) =$$

$$= \{\square_a u\} * \mathcal{E}_n(x,t) + [u(x,0)\cdot\delta'(t)] * \mathcal{E}_n(x,t) + \left[\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}\cdot\delta(t)\right] * \mathcal{E}_n(x,t) =$$

$$= \underset{\{\square_a u\}}{\underset{\downarrow}{V_n(x,t)}} + \underset{u(x,0)}{\underset{\downarrow}{V_n^{(1)}(x,t)}} + \underset{\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}}{\underset{\downarrow}{V_n^{(0)}(x,t)}}$$

ч.т.д.

Следствие 2. Пусть $F(x,t) = u_1(x)\delta(t) + u_0(x)\delta'(t)$ (классическая дифференциальная задача)

Тогда решение обобщ. задачи Коши для волнового оператора принадлежит классу C^∞ по переменной t и удовлетворяет сходится (в смысле слабой сходимости) при $t \to +0$

$u(x,t) \to u_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \to u_1(x)$ в $D'(R^{n+1})$

Док-во

Свойства волновых потенциалов (поверхностных)

1) $V_n^{(0)}, V_n^{(1)} \in C^\infty$ по t, $(0,\infty)$

2) $V_n^{(0)} = u_1(x) * \mathcal{E}_n(x,t)$ то $V_n^{(0)} \to 0$

$\frac{\partial V_n^{(0)}}{\partial t} \to u_1$ при $t \to +0$

$V_n^{(1)} = [u_0(x)\cdot\delta'(t)] * \mathcal{E}_n$

$V_n^{(1)} \to u_0(x)$, $\frac{\partial V_n^{(1)}}{\partial t} \to 0$ $t \to +0$

$$u(x,t) = F * \mathcal{E}_n = V_n^{(0)} + V_n^{(1)} \xrightarrow{t\to 0} u_0(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial V_n^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial V_n^{(1)}}{\partial t} \xrightarrow{t\to 0} u_1(x)$$

ч.т.д.

(*) очень хорошая формула

с помощью нее будем все решать.

Пример $u(x,t) \in D'(\mathbb{R}^2)$

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \Theta(x) \cdot \delta(t)$$

обобщенная задача Коши для волнового оператора

$$u(x,t) = \underbrace{[\Theta(x) \cdot \delta(t)]}_{\text{! прямое произведение}} \underbrace{*}_{\text{свертка.}} \mathcal{E}_1(x,t) =$$

$$= \Theta(x) * \frac{\partial \mathcal{E}_1(x,t)}{\partial t} = V_1^{(1)}(x,t) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{[\mathcal{E}_1(x,t) * \Theta(x)]}_{\substack{\text{поверхностный}\\ \text{потенциал простого}\\ \text{слоя с плотностью } \Theta(x)}} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\Theta(t)}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Theta(\xi) d\xi$$

Использование св-ва

$$\mathcal{E}(x,t) * [u(x) \cdot \delta^{(k)}(t)] = \frac{\partial^k \mathcal{E}(x,t)}{\partial t^k} * u(x)$$

Классическое решение этой задачи $(t>0)$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x-at}^{x+at} \Theta(\xi) d\xi = \frac{1}{2a} \left(a\Theta(x+at) + a\Theta(x-at) \right) =$$

$$= \frac{\Theta(x+at) + \Theta(x-at)}{2}$$

получили!

$\boxed{\square_a u = f}$

Получим из (*) все классические решения для

$\boxed{n=3}$ Формула Кирхгофа

$$u(x,t) = V_3(x,t) + V_3^{(0)}(x,t) + V_3^{(1)}(x,t) =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2} \int_{U(x:at)} \frac{f\left(\xi, t - \frac{|x-\xi|}{a}\right)}{|x-\xi|} d\xi + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S(x,at)} u_1(\xi) dS +$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S(x:at)} u_0(\xi)\,dS$$

$\boxed{n=2}$ <u>Формула Пуассона</u>

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\int\limits_{U(x:a(t-\tau))}\frac{f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|x-\xi|^2}}+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{U(x,at)}\frac{u_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|x-\xi|^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{U(x,at)}\frac{u_0(\xi)\,d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|x-\xi|^2}}$$

$\boxed{n=1}$ <u>Формула D'Аламбера</u>

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}u_1(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{x-at}^{x+at}u_0(\xi)\,d\xi$$

Непрерывна по f, u_0, u_1 $\Rightarrow$ задачи корректна! Верно $\forall n$.

$\boxed{\text{Лекция 8}}$ 31.03.08

<u>Тепловые потенциалы!</u> Фундамент. реш. ур-е теплопр.

$$\cancel{\mathcal{E}(x,t)\ \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{1/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}\to\delta(x)\ \text{в}\ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\ \text{при}\ t\to 0}$$

~~Док-во~~

~~Св-во~~

$$\cancel{\int\mathcal{E}(x,t)\,dx=1}$$

$$\mathcal{E}_n(x,t)=\frac{\Theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}$$

n – размерность пр-ва

<u>Св-ва</u>

1) $\mathcal{E}(x,t)\geq 0$

2) $\mathcal{E}(x,t)=0$ при $t<0$

3) $\mathcal{E}(x,t)\in C^\infty$ при $(x,t)\neq(0,0)$ и лок. интегр. в $\mathbb{R}^{n+1}$

4) $\int \mathcal{E}(x,t)\,dx = 1$

Док-во $t \geq 0 \Rightarrow Q(t) = 1$

$$\int \mathcal{E}(x,t)\,dx = \frac{Q(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}\,dx}{2a\sqrt{t}}\cdot(2a\sqrt{t})^n =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n\left(\int e^{-\xi_i^2}\,d\xi_i\right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n\cdot(\sqrt{\pi})^n = 1$$

$x^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2$ ф-ция ошибки

$\int$ Пуассона $= \sqrt{\pi}$ ч.т.д.

5) $\mathcal{E}(x,t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}} \to \delta(x)$ в $\mathcal{D}'(R^n)$ при $t \to +0$

док-во

$\measuredangle \int \mathcal{E}(x,t)\,[\varphi(x) - \varphi(0)]\,dx \ominus$

$\varphi(x) \in \mathcal{D}(R^n)$ - мн-во основных ф-ций финитная, ограниченная

$|\varphi(x) - \varphi(0)| < k_0$ - const $\forall x$

$$\ominus \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}}\int e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}\,[\varphi(x) - \varphi(0)]\,dx \leq$$

$|\varphi(x) - \varphi(0)| < |k_1(x) + o(|x|)|$ или $< k_1|x|$ при $|x| < 1$ по Тейлору.

Возьмем $k > \max(k_1, k_0)$

$$\leq \frac{k}{(4\pi a^2 t)^{n/2}}\int e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}\,|x|\,dx = \left\{\begin{array}{l}\text{видно, что } \int \underset{t\to 0}{\to} 0,\\ \text{переходим к сфер координатам}\end{array}\right\} =$$

$$= \frac{k\sigma_n}{(4\pi a^2 t)^{n/2}}\int e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}\, r^n\,dr\cdot\frac{1}{(2a\sqrt{t})^{n+1}} = \left\{\sigma_n - \text{площадь } n\text{-мерной сферы}\right\}$$

$= C\sqrt{t}$ докажем, что $\int \mathcal{E}(x,t)[\varphi(x)-\varphi(0)]dx \underset{t\to 0}{\to} 0$

$(\mathcal{E}(x,t), \varphi(x)) = \varphi(0)$, если $\mathcal{E}(x,t) \to \delta(x)$

$$(\mathcal{E}(x,t), \varphi(x)) \overset{\text{т.к. регуляр.}}{=} \int \mathcal{E}(x,t)\varphi(x)dx =$$

$$= \varphi(0) \underbrace{\int \mathcal{E}(x,t)\,dx}_{1} + \underbrace{\int \mathcal{E}(x,t)[\varphi(x)-\varphi(0)]dx}_{\to 0}$$

$\to \varphi(0)$ при $t \to +0$ $\quad \varphi(0) = (\delta, \varphi) \to$

$\Rightarrow \mathcal{E}(x,t) \to \delta(x)$ ч.т.д.

Основные св-ва фунд. решения доказаны.

<u>Опр</u> Тепловым потенциалом с плотностью $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ наз-ся обобщ. ф-ция $V = \mathcal{E} * f$.

Здесь f: $f(x,t) = 0$ при $t<0$. никто не гарантирует $\exists$.

$$\frac{\partial V}{\partial t} - a^2 \Delta V = f(x,t)$$ в том случае, если свертка $\exists$.

<u>существование теплового потенциала</u>:

1) f - финитна

Класс M - мн-во функций, локально интегр. и ограниченных в полосе $0 \le t \le T$. $\forall T$

Теорема Если $f \in M$, то тепловой потенциал с плотностью $f(x,t)$ существует, принадлежит классу M и

$$V(x,t) = \int_0^t \int_{R^n} \frac{f(\xi,\tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi d\tau$$

удовл оценке $|V(x,t)| \le t \sup_{\substack{0\le\tau\le t \\ \xi \in R^n}} |f(\xi,\tau)|$,

для него выполнено условие

$$V(x,t) \rightrightarrows 0 \quad x \in R^n,\ t \to +0$$

Если $f \in C^2(t \ge 0)$ и все производные этой ф-ции до второго порядка включительно ограничены в каждой полосе $0 \le t \le T$, то сам потенциал

$$V \in C^2(t>0) \cap C(t \ge 0)$$

Док-во $\mathcal{E}, f$ - лок интегр.

$$\mathcal{E} * f = \int_0^t \int_{R^n} f(\xi,\tau)\, \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)\, d\tau d\xi$$ - опред. и лок интегр. если

$$h(x,t) = \int_0^t \int_{R^n} |f(\xi,\tau)|\, \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)\, d\xi d\tau \le \sup_{\substack{0\le\tau\le t \\ \xi \in R^n}}$$

$$\le \sup_{\substack{0\le\tau\le t \\ \xi \in R^n}} |f(\xi,\tau)| \int_0^t \underbrace{\left(\int_{R^n} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)\, d\xi\right)}_{=1} d\tau =$$

$$= t \sup_{\substack{0\le\tau\le t \\ \xi \in R^n}} |f(\xi,\tau)|$$

т.е. в каждой полосе ф-ция $h(x,t)$ явл ограниченной.

$$(*)\ V=\int_0^t\int_{R^n}\frac{f(\xi,\tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau \ \ominus$$

Ясно, что • $|V|\le h \Rightarrow V(x,t)\rightrightarrows 0$. при $t\to+0$.

• $V(x,t)\in M$

Замена: ~~x=~~ $\xi=x-2a\sqrt{s}\,y,\ \tau=t-s$.

$$V\text{ в }(*)\ \ominus\ \frac{1}{\pi^{n/2}}\int_0^t\int_{R^n} f(x-2a\sqrt{s}\,y,\ t-s)\,e^{-|y|^2}dy\,ds\ \ominus\ V$$

* Пусть $f\in C^2(t\ge0$ и все произв. этой ф-ции до второго порядка включительно ~~от~~ из класса M.

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{1}{\pi^{n/2}}\left[\int_0^t\int_{R^n}\frac{\partial f}{\partial t}(x-2a\sqrt{s}\,y,\ t-s)\,e^{-|y|^2}dy\,ds+\right.$$

$$\left.+\int_{R^n} f(x-2a\sqrt{t}\,y;0)\,e^{-|y|^2}dy\right]$$

Все производные включая V_{tt} — непр. при $t>0$. до второго порядка включ

т. т.д.

Поверхностный волновой потенциал

Опр Поверхностным тепловым потенциалом (1-го рода) $V^{(0)}$ наз-ся ~~волновой~~ тепловой потенциал с плотностью

$u_0(x)\cdot\delta(t)$ т.е.

$$V^{(0)}_{(x,t)}=\mathcal{E}\underset{(x,t)}{*}[u_0(x)\cdot\delta(t)]=\ u_0\in D'(R^n)\text{ — плотность } V^{(0)}$$

$$=\mathcal{E}(x,t)*u_0(x)$$

Условия ∃-ния $V^{(0)}$:

1) $u_0(x)$ - финитна → $V^{(0)}$ - существует.

Теорема Если $u_0(x)$ ограничена в R^n и локально интегр (по Риману), то поверх тепл потенц существ., принадлежит классу М (как обоб-н. ф-ция) бесконеч дифф по t при $t>0$ представим интегралом Пуассона

$$V^{(0)}(x,t) = \frac{\Theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{R^n} u_0(\xi)\, e^{\frac{-|x-\xi|^2}{4a^2t}}\, d\xi$$

удовл. оценке

$$|V^{(0)}(x,t)| \le \sup_{\xi\in R^n} |u_0(\xi)|, \quad t>0.$$

Если $u_0(x)$ - непр в R^n, то потенциал $V^{(0)}$ принадлежит $C(t\geq 0)$ и удовлетворяет начальному условию $V^{(0)}\big|_{t=0} = u_0(x)$

Док-во

$$h(x,t) = \int |u_0(\xi)|\,\mathcal{E}(x-\xi,t)\,d\xi \underset{t<0}{=} 0 \text{ свертка по } x.$$

$t>0$ тогда $h(x,t) \le \sup_{\xi\in R^n} |u_0(\xi)| \underbrace{\int \mathcal{E}(x-\xi,t)\,d\xi}_{=1} =$

$$= \sup_{\xi\in R^n} |u_0(\xi)|$$

$\Rightarrow \exists$ $\mathcal{E} * u_0$, и записывается в виде $\int$ Пуассона,

т.к. обе ф-ции лок. интегр.

$(x,t) \to (x_0, t)$ $t>0$

$u_0(x)$ — непр.!

$\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$: $|u_0(\xi) - u(x_0)| < \varepsilon$ при условии $|\xi - x_0| < 2\delta$

$\Rightarrow$ Если $|x - x_0| < \delta$, $|y| < \delta$ то $|x - y - x_0| < 2\delta$

$$|V^{(0)}(x,t) - u_0(x_0)| = \int |u_0(\xi) - u_0(x_0)|\, \mathcal{E}(x-\xi, t)\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{|y|<\delta} |u_0(x-y) - u_0(x_0)|\, \underbrace{\mathcal{E}(y,t)}_{\le 1}\, dy + \int\limits_{|y|>\delta} |u_0(x-y) - u_0(x_0)|\, \mathcal{E}(y,t)\, dy \le$$

$\boxed{y = x - \xi}$ ~~$|y|<\delta$~~

$\le \varepsilon + \varepsilon$, $|t| < \delta_1$ при достаточно малом t.

ч.т.д.

$\boxed{\text{Лекция 9}}$
1.04.08

Задача Коши для теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f$$

$$u|_{t=0} = u_0$$

$f \in C(t \geq 0)$, $u_0(x) \in C(\mathbb{R}^n)$

Если u — классич. решение, то $u \in C^2(t>0) \cap C(t \geq 0)$

$\tilde{u}$, $\tilde{f}$ — продолжение нулем ф-ций u и f в $t<0$.

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - a^2 \Delta \tilde{u} = \tilde{f}(x,t) + u_0(x)\cdot\delta(t)$$

Опр Обобщенной задачей Коши для ур. тепл с плотностью $F(x,t) \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$ наз-ся задача о нахождении ф-ции $u(x,t) \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$ обращ в нуль при $t<0$ и удовл уравнению $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = F_{(x,t)}$

Условие на $F(x,t)$

$\forall \varphi(x,t) \in D(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u, \varphi\right) = (F(x,t), \varphi)$$

Для того, чтобы обобщ. зад Коши имела реш необход, чтобы $F(x,t) = 0$ при $t<0$

Теорема $\exists\, F(x,t) = f(x,t) + u_0(x)\cdot\delta(t)$, где $f(x,t) \in M$, $u_0(x)$ – огр. ф-ция в $\mathbb{R}^n$

тогда решение обобщ. задачи Коши для уравнения теплопроводности $\exists!$ в классе M.

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi,\tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} e^{\frac{-|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi\, d\tau + \frac{\Theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi) e^{\frac{-|x-\xi|^2}{4a^2 t}} d\xi$$

Решение непрер. зависит от u_0 и f

Если $f \in C^2(t \geq 0)$ и все её произв до второго порядка включ принадл. классу M, $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ то $u(x,t)$ – классич. решение

Док-во т.к. $f \in M$, u_0 - огран, то свертка $\mathcal{E} * f(x,t) + \mathcal{E} * u_0(x)$ существует

$$u(x,t) = \mathcal{E}(x,t) * f(x,t) + \mathcal{E}(x,t) * u_0(x) = V + V^0$$

Решение единственно в классе M (по основной теореме построения фунд. решения)

Краевые (граничные) задачи для уравнений эллиптического типа

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = \lambda u \quad G\text{ - огр область в } R^n \qquad (1)$$

$$p \in C^1(\overline{G}),\ q \in C(\overline{G}),\ p(x) > 0,\ q(x) \geq 0.$$

+ гранич. усл:

на границе S области G S - кусочно-гладкая

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } S \qquad (2)$$

$$\alpha \in C(S),\ \beta \in C(S),\ \alpha(x) \geq 0\quad \beta(x) \geq 0,\ \alpha(x) + \beta(x) > 0,\ x \in S$$

S_0 - часть границы, где $\alpha(x) > 0$, $\beta(x) > 0$.

Задачу поставим.

$$L = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad}) + q$$

D_L = область опред опер L

D_L состоит из ф-ций $f(x) \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$

~~удовл уравн (1)~~ и гранич усл (2),

$$Lf \in L_2(\overline{G})$$

Область опр D_L всюду плотна в $L_2(G)$)
$D(G) \subset D_L$, $D(G)$ всюду плотн. в $L_2(G)$

$Lu = \lambda u$, $u \in D_L$

$u = 0$ - решение.

Задача — нахождение с.ф.

Формулы Грина

$u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, $v \in C^1(\overline{G})$

Первая формула Грина:

$$\int_G v L u \, dx = \int_G p \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_S p v \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_G q u v \, dx$$

(прямое следствие формулы Остроградского)

Вторая формула Грина.

Нужно увеличить гладкость: $u, v \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$

$$\int v L u dx - \int u L v dx$$

$$\int_G (v L u - u L v) dx = \int_S p \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) dS$$

подставим в (1) $p = 1$ $q = 0$.

1-ая и 2-ая ФГ для оператора Лапласа

$$\int_G v \Delta u \, dx = -\int_G \sum \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

$$\int_G (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) dS$$

Эрмитовость оператора L — 16-20, 17-05, 17-10, 17-55

$(u, Lv) = (Lu, v)$ $u, v \in L_2(G)$, $Lu, Lv \in L_2(G)$
$u, v \in D_L$

Необходимое и достаточное условие эрмитовости

$(Lu, u) \in R$ $\forall u \in R^n$ $(u \in D_L)$

D_L — ~~вып~~ в.н. в пр-ве

Не путать эрмитовость и самосопряженность

$\exists f, g \in D_L \Rightarrow Lf \in L_2(G)$,
$L\bar{g} = \overline{Lg}$ (т.к. оператор с действительными коэф-и)
$\in L_2(G)$

$$\int_G \bar{g}\, Lf - f\, \overline{Lg}\, dx \overset{2\text{-я ФГ}}{=} (Lf, g) - (f, Lg) = \int p\left(f \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} - \bar{g}\frac{\partial f}{\partial n}\right) ds =$$
$\overset{\parallel}{0}$

$= \{$граничные условия$\} = 0. \Rightarrow$ оператор эрмитов

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha \bar{g} - \beta \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} = 0 \\ \alpha f - \beta \frac{\partial f}{\partial n} = 0 \end{array}\right\}$$

Система, кот имеет нетривиальное реш.
неизвестные — α, β
$\Rightarrow$ опред. системы $= 0$.

$$\begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial n} \\ \bar{g} & \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} \end{vmatrix} = 0 = f\frac{\partial \bar{g}}{\partial n} - \bar{g}\frac{\partial f}{\partial n}$$

Лекция 10

07.04.08

Св-ва оператора L:

$$L = -\mathrm{div}(p\,\mathrm{grad}) + q$$

Область определения $-\mathcal{D}_L$ опр. L состоит из ф-ций, принадлежащих классу $C^2(G)\cap C^1(\overline{G})$

эти ф-ции удовл. граничному условию $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ на S,

если $f \in \mathcal{D}_L$, то $Lf \in L_2(G)$

условие на ф-ции:

$p \in C^1(\overline{G})$, $q \in C(\overline{G})$

$p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $x \in G$

$\alpha \in C(S)$ гладкая, $\beta \in C(S)$

$\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ $\qquad \alpha + \beta > 0$

Важнейшее св-во:

1) $\mathcal{D}_L$ - в.п. в $L_2(G)$

2) L - эрмитов (его с.з. вещественные)

с.ф. ортогональны, $\exists$ базис из с.ф

3) с.ф., соответствующ. различным с.з ортогональны

4) с.з. оператора L неотрицательны. (оператор $L \geq 0$)

Док-во:

Ф-ла Грина: $\int\limits_G v L u\,dx = \int\limits_G p \sum_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx - \int\limits_S p v \frac{\partial u}{\partial n}\,dS +$

$+ \int\limits_G q u v$

Подставляем $u = f$, $v = f$

скалярное произведение:

$$(Lf, f) = \int p\,|\mathrm{grad}\, f|^2\,dx - \int\limits_S p f \frac{\partial f}{\partial n}\,dS + \int\limits_G q\,|f|^2\,dx$$

__Обозначение:__ S_0 – та часть S, где $\beta > 0$, $\alpha > 0$ и

граничное условие: $\alpha f + \beta \frac{\partial f}{\partial n} = 0$ на S

если $\beta > 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial n} = -\frac{\alpha}{\beta} f$

если $\beta = 0$ $\quad \alpha \neq 0 \quad f = 0$

$\beta \neq 0$, $\alpha = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial n} = 0$

} не рассматриваем.

$\measuredangle$ __$\alpha > 0$__ и __$\beta > 0$__ $\qquad \frac{\partial f}{\partial n} = -\frac{\alpha}{\beta} f$

$$(Lf, f) = \int p\,|\mathrm{grad}\, f|^2 + q\,|f|^2\,dx + \int\limits_{S_0} p\,\frac{\alpha}{\beta}\,|f|^2\,dS, \quad f \in D_L$$

Хотим доказать, что $L \geq 0$, т.е $\boxed{(Lf, f) \geq 0}$

НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТЬ

(т.е. нек. с.з. м.б. $= 0$)

$$(Lf, f) \geq \int p\,|\mathrm{grad}\, f|^2\,dx \geq \min p\, \|\,|\mathrm{grad}\, f|^2\|_{L_2}$$

$\min p = p_0$

$(Lf, f) \geq p_0 \cdot \|\,|\mathrm{grad} f|^2\|^2_{L_2}$ $\qquad$ ч.т.д.

Займемся свойствами собств. ф-ций.

$\boxed{\text{В } L_2 \text{ полнота и замкнутость совпадают}}$

Св-ва с.ф. оператора L:

1) для каждого с.з. $\exists$ вещественные с.ф.

$\exists$ $u_0 = u_1 + iu_2$ – с.ф., соотв. с.з. λ_0

$Lu_0 = Lu_1 + iLu_2 = \lambda u_0 = \lambda(u_1 + iu_2)$

$Lu_1 = \lambda u_1 \quad Lu_2 = \lambda u_2$ можем в L пр-ве выбрать полную систему с.ф.

<u>Лемма</u> Для того, чтобы $\lambda = 0$ было с.з. оператора u

$\Leftrightarrow \begin{cases} q = 0 \\ \alpha = 0. \end{cases}$

При этом с.з. λ имеет геометр. кратность 1, и с.ф, соотв. $\lambda = 0$ есть 1 – const.

(константы образуют базис в ядре этого опер-ра)

<u>Док-во</u> <u>Необходимость</u> $\exists$ $\lambda_0 = 0$ с.з. L,

u_0 – соотв. с.ф. $\Rightarrow Lu_0 = 0, \; u_0 \in D_L$

$$0 = (Lu_0, u_0) = \int_G p|\operatorname{grad} u_0|^2 + q|u_0|^2 dx + \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} |u_0|^2 ds$$

$u_0 \neq 0$ т.к. это с.ф.

$p|\operatorname{grad} u_0| = 0$

$q = 0, \alpha = 0$ – ч.т.д. $\Rightarrow \operatorname{grad} u_0 = 0, \; u_0 = \text{const}.$

<u>Достаточность</u>: $\exists$ $q = 0$ и $\alpha = 0 \Rightarrow -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \lambda u$

$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0$

$\lambda = 0$ – с.з. опер-ра L ч.т.д.

с.ф. – $u = \text{const}$

Пусть S - бесконечно-гладкая поверхность $\in C^\infty$

Граничное условие: $u\big|_S = 0$ или $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\big|_S = 0$

$\alpha \in C^\infty$

Теорема (основная)

1) Множество с.з. опер-ра L не имеет предельных точек

2) Каждое с.з. имеет конечную геометр. кратность

3) Система с.ф. опер-ра L явл полной в $\mathcal{D}_L$

(и полная, и замкнутая)

(Lf, f) - интеграл энергии $f \in \mathcal{D}_C$

$Lf \in L_2(G) \Rightarrow f(x) = \sum (f, x_k) x_k$

$L f(x) = \sum (Lf, x_k) x_k$

$(Lx_k, x_j) = \lambda_k (x_k, x_j) = \lambda_k \delta_{kj}$

Вспомогательное равенство Парсеваля

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, x_k)|^2$$

$$(Lf, f) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} (Lf, x_i) x_i , \sum_{j=1}^{\infty} (f, x_j) x_j\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (Lf, x_i) \cdot \overline{(f, x_j)} = \sum_{k=1}^{\infty} (f, Lx_i) \overline{(f, x_i)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_i (f, x_i) \overline{(f, x_i)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_i |(f, x_i)|^2$$

$$\boxed{(Lf, f) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_i |(f, x_i)|^2}$$

!

Утв (Вариационный принцип)

$$\lambda_k = \inf_{f \in D_L} \left\{ \frac{(Lf,f)}{\|f\|^2} \right.$$ при $(f, x_i) = 0$ $i = 0, 1, \dots, k-1$

нижняя грань достигается на $\forall$ с.ф. x_k

Док-во $(Lf,f) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |(f, x_k)|^2$. тогда возьмём

$f \in D_L$: $(f, x_i) = 0$ при $i = 1, \dots, k-1$

$$(Lf,f) = \sum_{i=k}^{\infty} \lambda_i |(f, x_i)|^2 \geq \underset{\min \text{из} (\lambda)}{\lambda_k} \sum_{i=k}^{\infty} |(f, x_i)|^2 \ominus$$

(чем больше i, тем больше λ_i) {из рав-ва Парсеваля}

$$\ominus \sum_{k=1}^{\infty} |(f, x_i)|^2 = \sum_{i=k}^{\infty} |(f, x_i)|^2 = \|f\|^2$$

$$\Rightarrow (Lf,f) \geq \lambda_k \|f\|^2 \Rightarrow \lambda_k \leq \frac{(Lf,f)}{\|f\|^2}$$ $f \in D_L$

$\Rightarrow \lambda_k$ - нижняя грань для

Она точная? - Да, т.к. подставляя вместо f x_k получим:

$$(Lx_k, x_k) = \lambda_k (x_k, x_k) \Rightarrow \lambda_k = \frac{(Lx_k, x_k)}{\|x_k\|^2}$$

ч.т.д.

Дифференцирование ряда Фурье.

$$\measuredangle \; \eta_p = f - \sum_{i=1}^{p} (f, x_i) x_i$$

$$(\eta_p, x_k) = \left(f - \sum_{i=1}^{p} (f, x_i) x_i, x_k\right) = \left(\sum_{i=p+1}^{\infty} (f, x_i) x_i, x_k\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & k = \overline{1..p} \\ (f, x_k), & k = \overline{p+1, \dots, \infty} \end{cases}$$ ортонормированность

$(L\eta_p, \eta_p)$ - ?

$(Lf, f) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |(f, X_k)|^2 \Rightarrow$

$(L\eta_p, \eta_p) = \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_k |(\eta_p, X_k)|^2 = \sum_{k=p+1}^{\infty} \lambda_k |(f, X_k)^2| \Rightarrow$

сх-ся

$\Rightarrow (\eta_p, \eta_p) \xrightarrow[p\to\infty]{} 0 \Rightarrow (L\eta_p, \eta_p) \geq p_0 \|\text{grad}\, \eta_p\|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\text{grad}\, \eta_p\|^2 = \|\text{grad}\, f - \sum_{k=1}^{p} (f, X_i)\, \text{grad}\, X_i\|^2 \leq$

$\leq \frac{1}{p_0} (L\eta_p, \eta_p) \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \text{grad}\, f = \sum_{i=1}^{\infty} (f, X_i)\, \text{grad}\, X_i$

ряд Фурье можно дифф-вать почленно 1 раз по x_i

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} (f, X_i) X_i$$

полученный ряд будет сх-ся к $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $\quad X = (x_1, \dots, x_n)$

Лекция 11
14.04.08

Задача Штурма-Лиувилля.

$n=1$ - одномерное пр-во

$$\begin{cases} Lu = -(pu')' + qu = \lambda u \\ h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0 \\ H_1 u(l) + H_2 u'(l) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- задача на с.з. частный случай того, чем занимались в прошлый раз

минус, т.к. вектор нормали будет направлен в другую сторону

$-\ 0 \leftrightarrow l\ +$

$p \in C^1([0, l]),\ q \in C([0, l])$

$p(x) > 0,\ q(x) \geq 0$

$h_1, h_2, H_1, H_2 \geq 0$ - const. $h_1 + h_2 > 0,\ H_1 + H_2 > 0$

2^n-1

L с областью определения, состоящей из ф-ций класса
$C^2(0,l)\cap C^1([0,l])$, удовлетв. граничным условиям (1),
вторая производная принадлежит $L_2(0,l)$

Интеграл энергии: $(Lf,f)=\int_G(p|\operatorname{grad} f|^2)+q|f|^2)dx+$

$$+\int_{S_0} p\frac{\alpha}{\beta}|f|^2 dS,\quad f\in D_L$$

опять смена знака

В одномерном случае:

$$(Lf,f)=\int_0^l(p|f'|^2)+q|f|^2dx+p(0)\frac{h_1}{h_2}|f(0)|^2+\frac{H_1}{H_2}p(l)|f(l)|^2$$

Решение этой задачи?

$Lu=-(pu')'+qu=f(x)$ (2)

краевой оператор со всеми ограничениями, кот были при постановке задачи

$\measuredangle$ Случай, когда $\lambda=0$ не явл с.з. оператора L

ядро нулевое

v_1, v_2 - явл. решениями ур-я

v_1 удовлетв. краевому условию $h_1v_1(0)-h_2v_1'(0)=0$

v_2 удовлетв. кр. усл-ю $H_1v_2(l)+H_2v_2'(l)=0$

$\exists$ v_1 и v_2 лин зависимы $\Rightarrow v_1=\alpha v_2 \Rightarrow v_1\not\equiv v_2$ (!?)

$\Downarrow$ v_1 и v_2 лин независимы.

$\Rightarrow$ Решение краевой задачи (2)

ф-ция Грина

$$(*)\quad u(x)=\int_0^l G(x,y)f(y)dy \qquad G(x,y)=-\frac{1}{p(0)\omega(0)}\begin{cases}v_1(x)v_2(y) & 0\le x\le y\\ v_2(x)v_1(y) & y\le x\le l\end{cases}$$

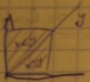
определитель Вронского

Св-ва ф-ции Грина.

1) Непрерывна в замкнутом ~~прямоугольнике~~ квадрате $\overline{\Pi} = [0, l] \times [0, l]$

2) Принадлежит классу C^2 в замкнутых треугольниках

$0 \le x \le y \le l, \quad 0 \le y \le x \le l$



3) При $x = y$ ф-ция Грина удовлетв. $L_x G(x,y) = 0$

4) На боковой поверх

$$h_1 G(0,y) - h_2 \frac{\partial G(0,y)}{\partial x} = 0$$

Пример построения ф-ции Грина

$-u'' = f(x), \ u(0) = u(1) = 0$

$p = 1 \quad q = 0$

$u_1 = x$, $u_2 = 1 - x$ > удовл. однородному ур-ю.

$$\omega(x) = \begin{vmatrix} x & 1-x \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -x - (1-x) = -1$$ – определитель Вронского

$$G(x,y) = 1 \begin{cases} x(1-y) & 0 \le x \le y \\ (1-x)y & y \le x \le l \end{cases}$$

Решение → (*)

$\boxed{G(x,y) = G(y,x)}$ – симметрич. ф-ция

эрмитовость

Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральному ур-ю Фредгольма второго рода с симметрическим ядром.

Теорема Краевая задача $Lu = \lambda u + f$, где $u \in D_L$, $f \in C(0,l) \cap L_2(0,l)$

при условии, что $\lambda = 0$ не явл с. з. опер-ра L эквивалентна интегральному ур-ю

$$u(x) = \lambda \int_0^l G(x,y) u(y) dy + \int_0^l G(x,y) f(y) dy,$$ где $G(x,y)$ — ф-ция Грина

Док-во

$\exists$ $u(x)$ - решение краевой задачи.

$$u(x) = \int_0^l G(x,y)[\lambda u(y) + f(y)] dy = \lambda \int_0^l G(x,y) u(y) dy + \int_0^l G(x,y) f(y) dy$$

$\exists$ $u_0 \in C([0,l])$ явл решением интегр ур-я.

$Lu = \lambda u_0 + f$ - будет ли u_0 решением?

её реш по ф-ле Грина

$$u(x) = \int_0^l G(x,y)(\lambda u_0 + f) dy = u_0$$

$\Rightarrow$ решение краевой задачи.

$$Lu_0 = \lambda u_0 + f.$$

ч.т.д.

$\exists f=0$ $Lu=\lambda u$ → решение:

$$u(x)=\lambda\int_0^{\ell} G(x,y)\,u(y)\,dy$$ – решение задачи на с.з.

$\boxed{\exists \lambda=0}$

$Lu=-(pu')'+qu=\lambda u$ — $q=0$ – необходимое усл-е

$L_1u=-(pu')'+(q+1)u=(\lambda+1)u$ –

заметь оператор L_1 не имеет ~~знач~~ с.з. $\lambda=0$,

м.з. решение по ф-ле:

$$u=(\lambda+1)\int_0^{\ell}\tilde{G}(x,y)\,u(y)\,dy$$. но G-другое, G-для опер-ра L_1.

Св-ва собств ф-ций и с. чисел интегр. опер-ра Фредгольма с симметр ядром

1) Мн-во с.з. непусто и лежит на действ. оси.

2) Мн-во с.з. не имеет конечной предельной точки

3) Каждое с.з. имеет конечную геометрическую кратность

можно выбрать ортогон. систему с.ф. (полноты может не быть)

~~Свойства~~

Св-ва с.з. и с.ф. для задачи Штурма-Лиувилля

1) С.з. неотрицательны.

2) Мн-во с.з. счетно.

3) Геометрическая кратность с.з. равна 1.

специфическое св-во для задачи Ш-Л.

Док-во $\exists$ x_1, x_2 – с.ф. краевого опер-ра.

$-(px_i)' + qx_i = \lambda_i x_i$, $i = 1, 2$.

$\begin{cases} h_1 x_1(0) - h_2 x_1'(0) = 0 \\ H_1 x_1(l) + H_2 x_1'(l) = 0 \end{cases}$ $\quad$ $\dfrac{h_1 x_2(0) - h_2 x_2'(0) = 0}{H_1 x_2(l) + H_2 x_2'(l) = 0}$

СЛАУ – имеет нетривиальное реш.

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1(0) & x_1'(0) \\ x_2(0) & x_2'(0) \end{vmatrix} = 0$